MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF

XLIX. KÖTET

BUDAPEST, 1942

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

A MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

negyvenkilencedik kötetének tartalma.

Oldal

Borbély Samu: Lövedékek ellenállásának hidrodinamikai megközelítő meghatározásáról 254
— Über die näherungsweise hydrodynamische Bestimmung des Geschosswiderstandes 273
Detre László: Az intersztelláris anyagok fénygyengítése 187
— Über die Schwächung des Lichtes durch die interstellare Materie 206
Fejes László: Az egyenlőoldalú háromszögrács mint szélsőértékfeladatok megoldása 238
— Das gleichseitige Dreiecksgitter als Lösung von Extremalaufgaben 248
Grünwald Géza: Az interpoláció alapfüggvényeiről 76
— Über die Grundfunktionen der Interpolation 83
Hajós György: A hibabecslés alapjai 84
— Grundzüge der Fehlerabschätzung 122
Kilczer Gyula: A látszólagos mozgás 170
— Die scheinbare Bewegung 186
Kornis Gyula: A matematika nevelő hatása 230
— La valeur éducative des mathématiques 237
Molnár József: Egy elemi geometriai szélsőértékfeladat 249
— Über eine elementargeometrische Extremalaufgabe 253
Szőkefalvi Nagy Béla: Függvények megközelítése Fourier-soruk számtani közepeivel 123
— Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen 138
Ortvay Rudolf: Galilei és az újkori tudományos gondolkodás kibontakozása 139
— Galilei und die Entfaltung des neuzeitlichen wissenschaftlichen Denkens 169
Pogány Béla: Gyászbeszéd Rados Gusztáv ravatalánál 228
Rédei László: Jelentés az 1942. évi Kőnig Gyula-jutalomról 1
— Bericht zur Verteilung des Julius Kőnig-Preises vom Jahre 1942 33
— A rácsparallelogrammákról 73
— Über Gitterparallelogramme 75

Olda

RIESZ FRIGYES: Az ergodikus elmélet néhány kérdéséről 34
— Sur quelques problèmes de la théorie ergodique 60
STACHÓ TIBOR: Gyászbeszéd Rados Gusztáv ravatalánál 225
SZÁSZ PÁL: Az aequidistans interpolációról 63
— Über die äquidistante Interpolation 69
TARNÓCZY TAMÁS: A hangképző üregek rezonanciaadatai 274
— Resonance data of vowel resonators 290
TIHANYI MIKLÓS: A Weber-féle rezolvens kiszámítása 70
— Die Berechnung der Weberschen Resolvente 72
VERESS PÁL: Jelentés az 1942. évi Kőnig Gyula-jutalomról 16
— Bericht zur Verteilung des Julius Kőnig-Preises vom Jahre 1942 33

*

Kitűzött feladatok (9—16) 207, 291
Megoldott feladatok (4—8) 208, 292
Irodalom 213, 302
Társulati élet 215
Tanulóversenyek 304

MATEMATIKAI

ÉS

FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES ÉS ORTVAY RUDOLF

XLIX. KÖTET

1942

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST, 1942

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

Oldal

Rédei László és Veress Pál: Jelentés az 1942. évi Kőnig Gyula jutalomról ... 1
Riesz Frigyes: Az ergodikus elmélet néhány kérdéséről ... 34
Szász Pál: Az aequidistans interpolációról ... 63
Tihanyi Miklós: A Weber-féle rezolvens kiszámítása ... 70
Rédei László: A rácsparallelogrammákról ... 73
Grünwald Géza: Az interpoláció alapfüggvényeiről ... 76
Hajós György: A hibabecslés alapjai ... 84
Szőkefalvi Nagy Béla: Függvények megközelítése Fourier-soruk számtani közepeivel ... 123
Ortvay Rudolf: Galilei és az újkori tudományos gondolkodás kibontakozása ... 139
Kilczer Gyula: A látszólagos mozgás ... 170
Detre László: Az intersztelláris anyagok fénygyengítése ... 187
Kitűzött feladatok ... 207
Megoldott feladatok ... 208
Irodalom ... 213
Társulati élet ... 215
Pénztárosi kimutatás a befolyt összegekről ... 222

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* (**XI., Horthy Miklós-út 28., Lénárt-pensio**), a fizikai tárgyúak pedig *Ortvay Rudolf* (**VIII., Múzeum-körút** 4/c, Egyetemi elméleti fizikai intézet) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrekturára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Ortvay Rudolf* titkár címére küldendők.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámlájára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, címváltozások *Jelitai József* pénztáros címére (II., Bimbó-út 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des geschäftsführenden Sekretärs *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/*c*.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/*c*.

JELENTÉS
AZ 1942. ÉVI KŐNIG GYULA JUTALOMRÓL.

Társulatunk választmánya 1941. nov. 13-án tartott ülésén az 1942. évi Kőnig Gyula jutalom ügyében a következő bizottságot küldte ki: elnök FEJÉR LIPÓT, tagok: EGERVÁRY JENŐ, KERÉKJÁRTÓ BÉLA, KŐNIG DÉNES, RÉDEI LÁSZLÓ és VERESS PÁL, és annak a kívánságának adott kifejezést, hogy — amennyiben ezt a bizottság is kívánatosnak tartja — 1942-ben a Társulat jubileuma alkalmából kivételesen *két* Kőnig Gyula jutalom kerüljön kiosztásra. A bizottság e javaslatot örömmel elfogadta és azt indítványozta, hogy egy-egy Kőnig Gyula jutalom Dr. HAJÓS GYÖRGY műegyetemi adjunktusnak és Dr. SZŐKEFALVI NAGY BÉLA egyetemi m. tanárnak ítéltessék. Egyben felkérte RÉDEI LÁSZLÓT, hogy HAJÓS GYÖRGY tudományos működéséről, VERESS PÁLT pedig, hogy SZŐKEFALVI NAGY BÉLA tudományos működéséről beszámoljon. Mindkét felkért referens készséges örömmel vállalta a megtisztelő megbízatást és jelentéseit az alábbiakban terjeszti a mélyen tisztelt Társulat elé.[1]

Hajós György munkáinak ismertetése.[2]

Dr. HAJÓS GYÖRGY 1938-ban tett doktori szigorlatot, de már ezt megelőzően, 1934-től kezdve figyelmetkeltő dolgozatai jelentek meg. Évek óta a M. Kir. József Nádor Műszaki- és Gazdaságtudományi Egyetem egyik matematikai tanszékén mint tanársegéd, majd adjunktus működik és ezzel is értékes tudományos tevékenységet fejt ki. Számos tankönyv- és dolgozatismertetés is megjelent HAJÓS tollából a szegedi Acta Scientiarum Mathe-

[1] Kivonatosan előadva a Társulat 1942. ápr. 9-i előadó ülésén.
[2] Írta RÉDEI LÁSZLÓ.

maticarum és a Zentralblatt für Mathematik hasábjain. Néhány becses megjegyzése helyet kapott Kőnig Dénesnek a gráfelméletről írt tankönyvében. Végül említsük meg Hajósnak a Matematikai és Fizikai Lapok nemrég felújított Feladatok és megoldások rovatában való ismételt szereplését. Dolgozatainak jegyzéke eme ismertetés végén olvasható időrendi összeállításban.

Hajós vizsgálatai a determinánselmélet, gráfelmélet, geometria, lineáris egyenlőtlenségek és csoportelmélet körébe esnek, tárgyalásmódja legnagyobb részben algebrai és kombinatorikai. Dolgozataiból kiemelkedik a szerző erős elvonatkoztató képessége s a problémák mélyére való lehatolása, egyszer pillanatnyi meglátás által, máskor szívós kitartás árán. Legbenső énjének rövid jellemzése talán ez lehet: rajongója a könnyűnek látszó nehéz kérdéseknek.

Hajós főműve Minkowski ama híres sejtésének bizonyítása, amely sejtés kapcsolatos a lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságáról szóló, ugyancsak Minkowski nevét viselő alapvető fontosságú tétellel. Ez olyan eredmény, amiért évtizedeken át, egészen a legújabb időkig sokan, közöttük több híres és fémjelzett matematikus, mint Furtwängler, Hofreiter, Mordell, Perron és Siegel versenyeztek. Mindezek a megelőző kísérletek a kérdésnek csak egészen kicsi részét tudták elintézni. Hajós, elődeire csak kevéssé támaszkodva, teljes általánosságban megoldja a kérdést, kimutatva a sejtés helyességét, sőt ezen túlmenően mindjárt bizonyos további nevezetes eredményeket nyer, többek között egy nagyon érdekes tételt a véges Abel-csoportok köréből.

Az itt következő részletesebb ismertetésben eltérünk a dolgozatok időbeli sorrendjétől, s azokat tárgyuk szerint csoportosítjuk.

Hajós második dolgozatában felállít és bebizonyít egy determinástételt, amely Schläfli és Kronecker tételeit, továbbá utóbbinak Radostól eredő kiterjesztését különös esetekként, egyben nagymértékű általánosítással, magában foglalja. Mindezek a megelőző tételek nagyfontosságú alkalmazást találnak a geometria, algebra és számelmélet területén. Rájuk több szerző több ízben visszatért, különösen sokat foglalkozott velük Rados

GUSZTÁV. SCHLÄFLI-tétele RADOS fogalmazásában a következő. Legyen

$$f=\sum_{\pi} u_{\pi}\pi$$

n számú $x_1,\ldots, x_n$ határozatlannak k-méretű homogén alakja, ahol az összegezésben π befutja az összes különböző

$$\pi = x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n} \quad (i_1 \geqq 0,\ldots, i_n \geqq 0;\ i_1+\cdots+i_n=k)$$

hatványszorzatokat, s a megfelelő u_{π} együtthatók ugyancsak határozatlanok, számosságuk $\binom{n+k-1}{k}$. Vessük alá az $(x) = x_1,\ldots, x_n$ változókat a legáltalánosabb homogén lineáris helyettesítésnek, azaz írjuk helyükbe rendre az

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_{nn}$$

kifejezéseket. Röviden A helyettesítésről fogunk beszélni, A-val jelölve az $|a_{ij}|$ determinánst. A helyettesítés eredménye ismét egy hasonló

$$\bar{f}=\sum_{\pi} \bar{u}_{\pi}\pi$$

alak, ahol az új $\bar{u}_{\pi}$ együtthatók az eredeti együtthatókból nyilvánvalóan ugyancsak homogén lineáris helyettesítéssel állnak elő, ami az úgynevezett indukált helyettesítés. Ennek $\bar{A}$ determinánsa $\binom{n+k-1}{k}$-rendű. SCHLÄFLI tétele szerint

$$\bar{A}=A^{\binom{n+k-1}{n}}.$$

KRONECKER tétele is megfogalmazható az előbbihez hasonlóan. Tekintsük ehhez az $(x) = (x_1,\ldots, x_m)$, $(y) = (y_1,\ldots, y_n)$ két változósorozatnak

$$f=\sum_{i,j} u_{ij}x_iy_j$$

homogén bilineáris alakját ismét határozatlan u_{ij} együtthatókkal. Mindkét változósorozatra egyidőben egy-egy A, illetve B helyettesítést alkalmazva, az előbbihez hasonló módon ismét előáll az u_{ij} együtthatóknak indukált helyettesítése. Ennek determinánsa mn-edrendű, értéke KRONECKER szerint

$$A^nB^m.$$

RADOS következőképpen általánosította KRONECKER tételét. Tekintsünk n számú m-edrendű $A_1, \ldots, A_n$ determinánst továbbá m számú n-edrendű $B_1, \ldots, B_m$ determinánst. Minden A_i, B párhoz a fenti módon előáll egy-egy indukált helyettesítés. A megfelelő mn számú ugyanilyen rendű determináns elemeiből bizonyos módon összeállítva egy ismét mn-edrendű determinánst, ennek értéke RADOS szerint éppen az

$$A_1 \ldots A_n B_1 \ldots B_m$$

szorzat. Itt nem tárgyalom közelebbről a RADOS-féle determináns megszerkesztését, minthogy ez az alábbiakban úgyis bennfoglaltatik. Egyébként mindezek a szerepeltetett determinánsok explicit utasításokkal is megadhatók, amire itt nem térünk ki.

HAJÓS tételét ugyancsak nem az ő eredeti fogalmazásában ismertetjük, hanem fentiekhez hasonló átírásban. A tétel az előrebocsátott három tétel szintézise. Ugyanis HAJÓS tétele is egy homogén alakon végrehajtott helyettesítésekkel hozható kapcsolatba, mégpedig a kiindulási alak mérete tetszésszerinti, mint SCHLÄFLI tételében, akárhány végesszámú változósorozatot tartalmaz, s ezek mindegyikében egyenként homogén, hasonlóan KRONECKER tételéhez, végül ezt az alakot RADOS gondolatának megfelelően több lineáris helyettesítésnek vetjük alá.

Tekintsünk mégpedig m számú változósorozatot:

$$(x_1) = (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x_m) = (x_{m1}, \ldots, x_{mn_m}).$$

Alkossuk meg belőlük az összes különböző olyan π hatványszorzatokat, amelyek az (x_i) sorozatból k_i számú tényezőt tartalmaznak. A π-k számossága

$$N = \prod_{i=1}^{m} \binom{n_i + k_i - 1}{k_i}.$$

E mellett tekinteni fogjuk még az összes különböző olyan π_i hatványszorzatokat is, amelyeket a π-kből az (x_i) sorozat elemeinek törlésével nyerünk. Ezek számossága

$$N_i = \frac{N}{\binom{n_i + k_i - 1}{k_i}}.$$

Tekintsünk továbbá valamennyi π közül egy tetszésszerinti π, ϱ elempárt és egy tetszésszerinti i-t az $1,\ldots, m$ számok közül. A π-ből tartsuk meg csak az $(x_j)(j<i)$ sorozatok elemeit, a ϱ-ból csak az $(x_j)(j>i)$ sorozatok elemeit, mindkettőből törölve a többi tényezőt, s jelöljük $(\pi\varrho)_i$-vel a megmaradt két hatványszorzat szorzatát $\big($nem feltétlenül $(\pi\varrho)_i=(\varrho\pi)_i\big)$. Az összes különböző $(\pi\varrho)_i$-k halmaza azonos az összes π_i-k halmazával.

Mindenegyes π_i-hez rendeljünk hozzá egy n_i-edrendű $A_i=A(\pi_i)$ determinánst. Szilárd i-hez tehát N_i számú A_i determinánst adtunk meg, s így összesen megadtunk $N_1+\cdots+N_m$ számú determinánst. Belőlük megszerkesztünk a következő módon egy N-edrendű $\bar{A}$ determinánst. Mindenekelőtt az $\bar{A}$ determinánsnál sormutatókul és ugyancsak oszlopmutatókul a π hatványszorzatokat fogjuk használni tetszésszerinti, de egyforma sorrendben. Akkor beszélhetünk $\bar{A}$-nak $a_{\pi\varrho}$ eleméről, értve ez alatt a π mutatójú sor és ϱ mutatójú oszlop közös elemét. Tekintsük továbbá az

$$f=\sum_{\pi} u_\pi \pi$$

alakot az u_π határozatlan együtthatókkal, amely alak tehát most egyenként az (x_i) változókban k_i-méretű homogén. Alkalmazzuk mindegyik (x_i) változósorozatra valamelyik A_i helyettesítést. Akkor a fenti értelemben ismét beszélhetünk az együtthatóknak

$$\bar{u}_\pi=\sum_{\varrho} a_{\pi\varrho} u_\varrho$$

indukált helyettesítéséről. Természetesen az $a_{\pi\varrho}$ együtthatók függenek a felhasznált A_i determinánsoktól. Ha azonban minden egyes π, ϱ párhoz, rendre minden egyes i mellett az összes A_i helyettesítések közül éppen azt választjuk ki, amelyet $(\pi\varrho)_i$-hez fent hozzárendeltünk, akkor $a_{\pi\varrho}$ egyértelmű meghatározást nyert, s ezzel a fent bejelentett $\bar{A}=|a_{\pi\varrho}|$ determinánst maradék nélkül értelmeztük. HAJÓS tétele végre azt mondja, hogy

$$\bar{A}=\prod_{i=1}^{m}\Big(\prod_{A_i} A_i\Big)^{\binom{n_i+k_i-1}{n_i}}.$$

Ha különösen $m=2$, $k_1=k_2=1$, ami az f-re nézve az általános bilineáris alak esete, akkor előáll RADOS tétele. Ha ezen felül valamennyi A_1 egyenlő, s ugyancsak valamennyi A_2 egyenlő, akkor előáll KRONECKER-tétele. Ha pedig $m = 1$, de k_1 tetszésszerinti, továbbá valamennyi A_1 egyenlő, akkor előáll SCHLÄFLI tétele.

Tételét HAJÓS egészen egyszerű eszközökkel bizonyítja, csupán a determináns legelemibb sajátságait s LAPLACE-féle kifejtését veszi segítségül. Az egyébként nagy figyelmet kívánó bizonyítás közelebbi részleteibe nem mehetünk bele.

Harmadik dolgozatában HAJÓS MENGERnek egy nevezetes gráfelméleti tételére közöl új bizonyítást. Megelőző bizonyítások magától MENGERtől és KŐNIG DÉNEStől vannak. HAJÓS bizonyítása nemcsak nagy egyszerűségű, hanem érdeme az is, hogy tartalmaz egy olyan újszerű fogalomalkotást, amely, mint ezt KŐNIG említett tankönyvében megjegyzi, egyéb gráfelméleti kérdésekben is haszonnal alkalmazhatónak látszik.

MENGER tételét megfogalmazandó, tekintsünk egy G véges gráfot, π_1, π_2, π legyenek a G pontjai halmazának részhalmazai. Ha π_1, π_2 idegenek és minden π_1-ből π_2-be vezető út π-nek valamely pontján keresztülmegy, akkor azt mondjuk, hogy π a π_1-et és π_2-t egymástól elválasztja. A tétel úgy szól, hogy ha a π_1-et és π_2-t elválasztó minden π legalább k pontból áll, akkor van G-ben k számú π_1-et és π_2-t összekötő idegen út.

A G valamely G' részgráfjának határpontján értjük a G' minden olyan pontját, amelybe belefut a G-nek legalább egy G'-n kívüli éle. Ennek az egyszerű fogalomnak segélyével értelmezi HAJÓS MENGER tételének bizonyítása céljából a fent bejelentett újabb fogalmat. Ez az értelmezés lényegében így szól: a G-nek egyik P ponját a G pontjainak egyik P-t nem tartalmazó π részhalmazától elkülönített, ha G minden, P-t nem tartalmazó, π-t tartalmazó részgráfjának legalább annyi határpontja van, mint amennyi pontja van π-nek.

Mielőtt HAJÓS többi dolgozatának ismertetésére térnénk, előre megbeszélünk néhány ismert fogalmat. Térről beszélve, rendesen az n-méretű R_n euklidesi teret fogjuk érteni. Ebben mindig adottnak tekintünk egy derékszögű koordinátarendszert, legyen O ennek kezdőpontja. Egy P pontot vagy az ő $x_1, \ldots, x_n$ koordinátáival vagy az OP ú. n. helyzetvektorral adunk meg, de OP vektor helyett is röviden P vektorról beszélünk. Ennek koordinátái egyben a P pont koordinátái is. Rácsnak nevezünk egy olyan ponthalmazt, amelynek van legalább két pontja, a végesben nincs sűrűsödési helye és amelyre a halmaz összes pontpárjai által meghatározott vektorok additív csoportot alkotnak. Ilyenkor ezeket a vektorokat rácsvektoroknak nevezzük, a rács pontjait rácspontoknak. A legegyszerűbb rács az egész koordinátájú pontok összessége. Ha semmi más rácsot nem adtunk meg, akkor rácspontokon a most mondott pontokat értjük. Hajós első dolgozatában megkapó egyszerűségű bizonyítást ad Minkowski ama fontos tételére, hogy egy O középpontú centrálisan szimmetrikus K konvex test biztosan tartalmaz belsejében még legalább egy további rácspontot, hacsak K térfogata $> 2^n$. Elég a bizonyítást az $n=2$ esetre, vagyis a sík esetére elvégezni, mert az általános eset is hasonlóan tárgyalható. Most a feltevés értelmében K területe >4. Fektessünk a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyeneseket a páratlan egész koordinátákkal bíró rácspontokon át. Ezzel a síkot olyan négyzetekre daraboltuk, amelyeknek területe 4. Ezeket a négyzeteket K bennük foglalt részeivel együtt eltolásokkal fedésbe hozzuk. Minthogy K területe nagyobb eme négyzetek közös területénél, azért lesz K-nak két olyan P, Q belső pontja, amelyek fedésbe kerülnek. Következőleg a $P-Q$ vektor koordinátái páros egész számok, azaz $\frac{1}{2}(P-Q)$ rácspont. Másrészt azonban a szimmetria miatt Q-val együtt $-Q$ is belső pontja K-nak, s így a konvexitás miatt a P, $-Q$ szakasz felezőpontja, azaz a fenti $\frac{1}{2}(P-Q)$ rácspont is K belsejében van. Hajósnak ezt a bizonyítását Hardy és Wright szerzők felvették utóbbi években megjelent számelméleti tankönyvükbe. Egyébként Hajóssal csaknem egyidőben Fencheltől is megjelent egy hasonló bizonyítás, továbbá, amint erre utóbbi szerző egy később írott cikkében rámutat, hasonló eljárást alkalmazott Birkhoff egy 1914-ből kelt dolgozatában.

Mindjárt sorravesszük Hajósnak időrendben hetedik dolgozatát, minthogy ennek tárgya s eljárása az előbbivel rokon. Szó van benne arról a jólismert tételről, amely szerint, ha egy Π parallelotop csúcsai rácspontok és Π-nek határán és belsejében semmi további rácspont sincs, akkor Π térfogata 1.

A tételt határátmenettel nagyon könnyű bizonyítani. HARDY és WRIGHT fentemlített tankönyvében szerepel a tételnek egy elemi bizonyítása. Újabban VERESS közölt rá egy egyszerű bizonyítást, s ennek hatása alatt állt elő HAJÓS bizonyítása, amely kitűnik szemléletes voltával.

Most is elég a bizonyítást csupán az $n = 2$ esetre kidolgozni, amikor Π 1-területű parallelogrammába megy át. Ismét feldaraboljuk a síkot négyzetekre, azzal az eltéréssel, hogy most minden rácsponton át fektetünk a koordinátatengelyekkel párhuzamos egyeneseket, ami által 1 területű négyzetek állnak elő. Másrészt Π-t az összes rácsvektorokkal eltolva, előáll a síknak egy további feldarabolása, amelyben a részek Π-vel egybevágó parallelogrammák. Kevés meggondolással látni, hogy ha valamennyi négyzetet eltolásokkal fedésbe hozzuk, mindig velevive Π-nek beléjük eső részét, utóbbiak éppen egyszeres fedést létesítenek, amiből folyik a tétel állítása.

Foglalkozzunk most már HAJÓS negyedik, ötödik és hatodik dolgozatával, amelyeknek főtárgya MINKOWSKI említett sejtésének bizonyítása. Kezdenünk kell MINKOWSKInak a lineáris egyenlőtlenségekről szóló tételével: Ha a

$$\xi_1 = a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\xi_n = a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n$$

n számú valos együtthatójú lineáris alak determinánsa 1, akkor az

$$|\xi_1| \leqq 1, \ldots, |\xi_n| \leqq 1$$

egyenlőtlenségrendszernek az $x_1 = \cdots = x_n = 0$ megoldáson kívül van legalább egy további olyan megoldása, amelyben $x_1, \ldots, x_n$ egészek.

A tételnek nélkülözhetetlen szerepe van az algebrai számok elméletének felépítésében, ettől eltekintve egyik legelőkelőbb eredmény a diophantosi approximációk területén. A tétel fontos voltát tükrözi az is, hogy az MINKOWSKI és részben mások által többirányú kiterjesztésben és élesítésben részesült. Egyik legegyszerűbb s könnyen nyerhető élesítés úgy szól, hogy a tétel akkor is igaz marad, ha a szereplő egyenlőtlenségekből az «=»

jeleket egynek kivételével kizárjuk. Mindet nem szabad kizárni, mert például a

$$\xi_1 = x_1,$$
$$\xi_2 = a_{21}x_1 + x_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\xi_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{n,\,n-1}x_{n-1} + x_n$$

esetben a

$$|\xi_1| < 1, \dots, |\xi_n| < 1$$

egyenlőtlenségeknek csak csupa 0-ból álló egész számú megoldása van. Természetesen ez akkor is áll, ha az x-ek helyébe 1 determinánsú egész együtthatós homogén lineáris helyettesítéssel új változókat hozunk be. MINKOWSKI kimondta azt a sejtést, hogy fordítva, a mondott triviális kivételektől eltekintve, fenti tétele az «$=$» jelek elhagyása után is érvényes, de ezt csupán $n \leqq 3$ mellett tudta bebizonyítani.

MINKOWSKI óta, HAJÓST nem számítva, tizenöt dolgozat foglalkozott a kérdéssel, mintegy háromszáz oldal terjedelemben. A fent már említett legkiemelkedőbb szerzők közül egyedül PERRON négy terjedelmes cikket szentel a problémának, kimutatván a sejtést $n \leqq 9$ mellett. Ezeket az adatokat azért ragadki, hogy velük ecseteljük a MINKOWSKI sejtése felé fordult nagy érdeklődést. Valóban legvonzóbbak az olyan kérdések, amelyeknek tárgya egyszerű, mintegy a felszínen van, megoldásuk mégis nehéz, a mélységekben keresendő. A szóbanlévő kérdés méltán az ilyenek közé sorolandó.

Röviden megemlítem SIEGEL kísérletét, aki MINKOWSKI-tételére tisztán az analízis eszközeivel, mégpedig FOURIER-sorok segítségével egy újabb bizonyítást közölve, azt remélte, hogy hasonló nyomon MINKOWSKI sejtése is bizonyítható, de utóbbival adós maradt. Ettől eltekintve minden egyéb kísérlet, illetve részletbizonyítás és HAJÓS bizonyítása is a sejtésnek egy magától MINKOWSKItól származó, rendkívül megkapó, geometriai átfogalmazásából indul ki.

Ehhez állapodjunk meg mindenekelőtt abban, hogy kockán ezután kizárólag egy

$$|x_i - a_i| \leqq \tfrac{1}{2} \qquad (i=1,\dots,n)$$

ponthalmazt fogunk érteni. Az $(a_1, \ldots, a_n)$ pontot a kocka középpontjának nevezzük. Legyen H olyan kockák végtelen halmaza, amely kockák középpontjainak a végesben nincs sűrűsödési pontja. A H-t k-szorosan térfedőnek nevezzük, ha a tér pontjaiból leszámítva az olyan pontokat, amelyek H valamelyik kockájának határán vannak, a többi pontot pontosan k számú H-beli kocka tartalmazza. Különösen tehát egyszeresen térfedő a H (azaz $k = 1$), ha kockái a szó megszokott értelmében a tér feldarabolását képezik. A $k > 1$ esetben többszörös térfedésről beszélünk. A H halmazt kockarácsnak nevezzük, ha kockáinak középpontjai pontrácsot képeznek. Előfordulhat az, hogy egy kockarácsnak van két olyan kockája, amelyek egymásból valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos egységvektorral való eltolás által állnak elő. Az ilyen kockarácsokat (érthető okokból) oszlopozottnak nevezzük. Ezekután MINKOWSKI sejtésének fentemlített átfogalmazása így szól:

Minden egyszeresen térfedő kockarács oszlopozott.

A kérdés ebben az alakban annyira könnyen hozzáférhetőnek látszik, hogy első pillantásra mindenki kétségbevonná annak súlyosságát. A kérdés mély voltáról azonban meggyőz bennünket az, hogy a többszörösen térfedő kockarácsokról szóló hasonló sejtés jóllehet $n \leq 3$ mellett ugyancsak igaz, amint ezt HAJÓS előtt már FURTWÄNGLER kimutatta, $n \geq 4$ mellett már hamis. Ez utóbbit is HAJÓSnak sikerült kimutatnia, ezzel megcáfolva FURTWÄNGLER ellenkező sejtését. Egyébként HAJÓS a többszörösen térfedő kockarácsok kérdését FURTWÄNGLERtől függetlenül vetette föl és tárgyalta, az ő dolgozatáról csak később értesült. Magára a kérdésre alább még visszatérünk.

Mielőtt HAJÓS eljárására közelebbről rátérnénk, meg kell említenünk a MINKOWSKI-féle sejtés körüli vizsgálatoknak egy KELLERtől eredő nevezetes mellékhajtását. Ő azzal próbált a sejtés közelébe férkőzni, hogy az egyszeresen térfedő kockahalmazokat vizsgálta a rácstulajdonság elejtésével, s igyekezett kimutatni, hogy eme tágabb föltevés mellett is előfordul egy fenti tulajdonságú kockapár. Ezt a sejtést azonban csak $n \leq 6$ mellett tudta bizonyítani, s később sejtését $n \geq 7$ mellett ő maga kétségbe is vonta. KELLER sejtésébe PERRON is belekapcsolódott, s vizsgálataik sok érdekes és talán még le nem zárt részleteredményt hoztak.

HAJÓS negyedik dolgozatában, ami egyben doktori disszertációja, k-szorosan térfedő kockarácsok vizsgálatából indul ki, s kimutatja, hogy ha egy ilyen kockarács MINKOWSKI sejtésének ellentmond, akkor van egy további olyan ugyancsak k-szorosan térfedő és MINKOWSKI sejtésének még mindig ellentmondó kockarács, amelynek összes kockái racionális középpontokkal bírnak, értve ezen azt, hogy ezeknek összes koordinátái racionálisak. Ez a megállapítás $k = 1$ mellett TH. SCHMIDTtől való, azonban bizonyításának helyességéhez szó fér, amint ezt első izben PERRON megjegyezte.

Ezekután tekint HAJÓS egy tetszésszerinti olyan K kockarácsot, amely csupa racionális középpontú kockából áll, s a H-hoz megszerkeszt egy véges ABEL-csoportot, amelyre sikerül átjátszania a H bizonyos tulajdonságait. Jelölje ehhez P a H-beli kockák középpontjaiból álló pontrács rácsvektorainak additív csoportját, amely áll bizonyos

$$\mathfrak{p} = (x_1, \ldots, x_n)$$

elemekből. A csoporttulajdonságból és az x-ek racionális voltából folyik, hogy mindenegyes i mellett valamennyi x_i közös nevezővel írható:

$$x_i = \frac{y_i}{a_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ahol $a_1, \ldots, a_n$ szilárd pozitív egész számok és minden y_i is egész. Tekintsük az összes

$$\vartheta = \left(\frac{\alpha_1}{a_1}, \ldots, \frac{\alpha_n}{a_n}\right) \qquad (\alpha_i \text{ egész})$$

vektorokat. (Ennek geometriai jelentése az, hogy a teret feldaraboltuk $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ élű parallelotopokra, s HAJÓS él is ezzel a geometriai segédlettel, amit azonban mi a következőkben mellőzni fogunk.) A ϑ-k ismét egy D additív vektorcsoportot alkotnak, amelynek P véges indexű részcsoportja. A fentemlített fontos szerepet viszi a továbbiakban a $G = D/P$ faktorcsoport, amely véges ABEL-csoport. Legyenek a

$$\vartheta_i = (0, \ldots, 0, \frac{1}{a_i}, 0, \ldots, 0) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

elemeket tartalmazó mellékcsoportok rendre $A_1, \ldots, A_n$, amelyek e szerint G elemei. Származásánál fogva G is additív csoportnak lenne tekintendő, de technikai okokból alkalmasabb rá a multiplikatív írásmód. Akkor a fenti ϑ-t tartalmazó mellékcsoport az

$$A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n}.$$

alakban jelentkezik.

A H oszlopozott volta azt jelenti, hogy a $\mathfrak{p}$ vektorok között előfordul valamelyik $\mathfrak{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ egységvektor. Másrészt ezek éppen az $x_i \vartheta_i$ vektorok, amelyek rendre az $A_i^{a_i}$ mellékcsoportokban vannak, s így $\mathfrak{e}_i$ akkor és csak akkor eleme P-nek, ha $A_i^{a_i} = 1$. Azaz tehát:

A H kockarács akkor és csak akkor oszlopozott, ha valamelyik $A_i^{a_i} (i = 1, \ldots, n)$ egyenlő 1-gyel.

Tekintsük ezután az összes

$$\bar{\vartheta} = \mathfrak{p} + \alpha_1 \vartheta_1 + \cdots + \alpha_n \vartheta_n \qquad (0 \leq \alpha_i \leq a_i - 1;\ i=1, \ldots, n)$$

vektorokat, ahol $\mathfrak{p}$ befutja P összes különböző elemeit. Természetesen $\bar{\vartheta}$ eleme a D csoportnak, azonban a $\bar{\vartheta}$ ok korántsem tartoznak különbözők lenni. Mi több, amint ezt könnyű látni, a H kockarács akkor és csak akkor k-szorosan térfedő, ha valamennyi $\bar{\vartheta}$ a D minden vektorát pontosan k-szor szolgáltatja. Minthogy pedig $\bar{\vartheta}$ az $A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n}$ mellékcsoportba tartozik, azért érvényes a következő:

A H kockarács akkor és csak akkor k-szorosan térfedő, ha

$$A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n} \qquad (0 \leq \alpha_i \leq a_i - 1;\ i=1, \ldots, n)$$

a G összes elemeit pontosan k-szor adja.

Ezekután előáll Hajós következő tétele, amely szóbanlevő dolgozatának főeredménye:

Akkor és csak akkor létezik az R_n térben k-szorosan térfedő nem oszlopozott kockarács, ha találni egy olyan G véges Abel-csoportot s ebben n-számú $A_1, \ldots, A_n$ elemet úgy, hogy valamilyen $a_1, \ldots, a_n$ pozitív egész számokkal az

$$A_1^{\alpha_1} \ldots A_n^{\alpha_n} \qquad (0 \leq \alpha_i \leq a_i - 1;\ i=1, \ldots, n)$$

hatványszorzatok G minden elemét pontosan k-szor állítják elő, s e mellett $A_i^{\alpha_i} \neq 1 \, (i = 1, \ldots, n)$.

Ugyanis a megelőző két ténymegállapitás máris a tétel egyik fele, s a tétel második fele azáltal adódik, hogy a mondott tulajdonságú G csoporthoz könnyen megszerkeszthető egy k-szorosan térfedő nem oszlopozott kockarács az R_n-ben.

Ennek a tételnek alapján HAJÓS megadja a többszörösen térfedő kockarácsok kérdésére a fent mondott feleletet az által, hogy $n = 4$ mellett megszerkeszt egy olyan G-t, amely a mondott tulajdonsággal rendelkezik.

Ezután tekintsük már csupán az egyszeresen térfedő kockarácsok kérdését, vagyis az eredeti MINKOWSKI-féle sejtést. A fentiek szerint a sejtés korlátlan helyessége egyértékű a következő tétellel:

Ha egy G véges ABEL-csoport összes elemei egyértelműen előállnak az

$$A_1^{a_1} \ldots A_n^{a_n} \qquad (0 \leqq a_i \leqq \alpha_i - 1\,; \quad i = 1, \ldots, n)$$

alakban, akkor legalább egy A_i rendje α_i.

Oly egyszerűen hangzik ez a tétel, — gondoljunk csak az alaptétellel való szembeszökő hasonlóságra — hogy első hallásra mindenki azt hinné, már kézben van a felelet. Azonban a tétel nagyon is nehéznek bizonyult. Nem is birkózott meg vele HAJÓS szóbanlevő dolgozatában, de senki más sem a rákövetkező közel hároméves időszakban, mígnem a végleges válasz ismét neki sikerült ötödik dolgozatában.

Ebből a dolgozatból említsük meg mindenekelőtt azt a könnyen nyerhető, de nagyon érdekes megállapítást, hogy a szóbanlevő csoportelméleti tételt elegendő arra az esetre bizonyítani, amelyben az α_i számok mindannyian törzsszámok, — ebből már előáll a tétel teljes érvényessége. Mielőtt azonban rátérnénk arra, hogy hogyan bizonyítja HAJÓS ezt a tételt ebben az egyszerűbb alakjában, szeretnénk a tételnek magában a csoportelméletben való jelentőségére rávilágítani.

Amint az szokás, nevezzük egy csoport néhány különböző elemének összeségét komplexusnak. Ezek között nagyon egyszerű szerkezetűek az

$$(A)_p = (1, A, A^2, \ldots, A^{p-1})$$

alakú komplexusok, ahol A csoportelem és p törzsszám. Nevezzünk egy ilyent törzskomplexusnak. Ez maga is csoport akkor és csak akkor, ha A rendje p. Valamely C komplexusnak bármely

$$C = (A_1)_{p_1} \ldots (A_r)_{p_r}$$

szorzatelőállítását nevezzük a C törzsfelbontásának, amelyben természetesen feltesszük, hogy a jobboldali szorzat C minden elemét pontosan egyszer nyújtja. Nem minden komplexusnak van törzsfelbontása (ha pedig van ilyen, akkor távolról sem kell egyértelműségnek lenni, akkor sem, ha a tényezők sorrendjétől eltekintünk). Ha azonban C valamely véges ABEL-csoport, akkor könnyen megadhatók rá törzsfelbontások. Könnyen nyújt ilyeneket közvetlenül az alaptétel, de nagyobb általánosságot biztosít a következő, még mindig nagyon egyszerű utasítás.

Tekintsük a G véges ABEL-csoportnak egyik tetszésszerinti $(G=)G_r, G_{r-1}, \ldots, G_1, G_0(=1)$ kompozíciósorát, s legyen a G_i/G_{i-1} faktorcsoport rendje p_i. Akkor $p_1, \ldots, p_r$ törzsszámok. Ha minden $G_i - G_{i-1}$ komplexusból kiveszünk egy-egy A_i elemet, akkor

$$G = (A_1)_{p_1} \ldots (A_r)_{p_r}$$

biztosan törzsfelbontás. További törzsfelbontások előállnak a tényezők permutálása által.

Súlyos azonban az a kérdés, hogy melyek az összes törzsfelbontások? Nos HAJÓS csoportelméleti tétele sem több, sem kevesebb, mint a pontos válasz erre a kérdésre. Ugyanis a tételnek fentebb utoljára mondott alakja nyilván egyezik a következővel:

Minden G véges ABEL-csoport bármelyik törzsfelbontásában legalább az egyik tényező csoport.

Ennek a tételnek könnyen nyerhető egyenes következménye, hogy G-nek nincsen is más törzsfelbontása, mint amelyeket a fent mondott úton G kompozíciósorai nyújtanak. Ennek fordítottja is nyilvánvalóan igaz, s mindezekből előáll HAJÓS tételének következő új alakja. Minden véges ABEL-csoport kompozíciósorai (a fent mondott úton) máris szolgáltatják a csoport összes törzsfelbontásait.

E szerint HAJÓS tétele fellebbentett egy fátylat a véges ABEL csoportokról, amely csodálatos egyszerűséget takart. Mennyire ellentmondóan és hihetetlenül hat ezekután, hogy HAJÓS eme tartalmában oly nagyon egyszerű csoportelméleti tételének bizonyítása csak nehéz, verejtékes munkával sikerülhetett. Könnyű út a bizonyításhoz tíz is kínálkozik, de mindegyik csakhamar út helyett inkább útvesztőnek látszik.

HAJÓS bizonyításának főnevezetessége az, hogy a kérdést a G csoportról átteszi ama $\Gamma[G]$ csoportalgebra területére, amely előáll azáltal, hogy a racionális egész számok gyűrűjéhez adjungáljuk a G csoport elemeit. Pontosabban beszélve, ez a $\Gamma[G]$ áll az

$$a_1A_1+\cdots+a_sA_s \qquad (a_i \text{ rac.eg.}; A_i \text{ eleme } G\text{-nek})$$

elemekből, amelyekkel a szokásos szabályok szerint összeadást, kivonást és szorzást végezünk. Jelentse különösen ΣG a G elemeinek összegét, továbbá legyen $S=1+A+A^2+\cdots+A^{p-1}$ valamely törzskomplexus elemeinek összege, amit HAJÓS törzssornak nevez. «Ciklikus» a törzssor, ha $A^p=1$. Ezekután HAJÓS így mondja ki tételét:

Ha a G véges ABEL-csoportra fennáll

$$\Sigma G=S_1\ldots S_r,$$

ahol minden S_i törzssor, akkor ezeknek legalább egyike ciklikus.

Mármost HAJÓS az által bizonyítja tételét, hogy vizsgál általánosabban olyan

$$\Pi=B_1\ldots B_m$$

szorzatokat, amelyeknek tényezői $\Gamma[G]$ elemei, s az ilyen szorzatokra megállapítja a segédtételeknek egész sorozatát, amelyek részben nagy általánosságúak s önmagukban is érdekesek. Nevezetes körülmény az, hogy céljai eléréséhez szükséges olyan Π szorzatokat is tekintenie, amelyeknek tényezői között részben negatív együtthatókkal bíró csoportalgebra-elemek is szerepelnek, különösen pedig előkelő helyet töltenek be e közben a $\Gamma[G]$ zérusosztói.

Itt említjük meg, hogy HAJÓS csoportelméleti tételéhez hasonló bizonyos nem ABEL-féle véges csoportokra is fennáll, mint a quaterniók csoportjára s a diéder-csoportra.

HAJÓS hatodik dolgozata a most ismertetett két magyarnyelvű dolgozatnak német nyelvre való átdolgozása, amely utóbbiban a tárgyalás néhány ponton egyszerűbb és a csoportalgebrai rész egy lényeges helyén eltérő.

Elmondott ismertetésünkhöz jegyezzük meg, hogy általában nem igyekeztünk HAJÓS meggondolásait azon a ponton túl is követni, ahol az igazi finomságok kezdődnek; az ezekbe való behatolás csak az ismertetett dolgozatokba való elmélyülés árán lehetséges.

Mégegyszer hangsúlyozva HAJÓSnak rendkívüli teljesítményét, értve MINKOWSKI sejtésének bizonyítását, kívánunk neki további nemes munkát a matematika területén, s további szép sikereket.

Hajós György dolgozatainak jegyzéke.

1. Ein neuer Beweis eines Satzes von Minkowski. Acta Litt. Sci. Szeged **6** (1934), 224—225.

2. Egy determináns-tétel. Mat. természettud. ért. **50** (1934), 231—238,

3. Zum Mengerschen Graphensatz. Acta Litt. Sci. Szeged **7** (1934), 44—47.

4. Többméretű terek befedése kockaráccsal. Mat. Fiz. Lapok **45** (1938), 171—190.

5. Többméretű terek egyszeres befedése kockaráccsal. Mat. Fiz. Lapok **48** (1941), 37—64.

6. Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. Math. Ztschr. **47** (1941), 427—467.

7. A rácsparallelogrammákról. Mat. Fiz. Lapok **48** (1941), 398—400.

8 6-os számú feladat. Mat Fiz. Lapok **48** (1941), 562.

9. A 3-as számú feladat megoldása. Mat. Fiz. Lapok **48** (1941), 569—570.

Szőkefalvi Nagy Béla munkáinak ismertetése.[1]

SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁnak igen kiterjedt irodalmi munkássága van, amely a matematika nagy területét öleli fel. Ezért le kell mondanom arról, hogy minden munkájáról beszámoljak, inkább csak szemelvényeket mutathatok be. Így különösképpen mellőznöm kell első két dolgozatát, melyek a matematikai fizika körébe vágnak és éppen ezért a KŐNIG GYULA emlékére tett ala-

[1] Irta Veress Pál.

pitvány intenciója szerint csak másodsorban vehetők figyelembe ennek a tiszta matematikai munkák jutalmazását szolgáló díjnak az odaítélésénél.

A tiszta matematika körébe vágó munkáinak a többsége a valósváltozós függvények elméletébe, különösképpen az ortogonális függvényrendszerek és az operátorok elméletébe, továbbá a végtelen csoportok elméletébe tartozik. Dolgozatai is mutatják, hogy a szegedi iskolából került ki, különösen a legelső dolgozatainak tárgyválasztásán meglátszik szegedi professzorainak a hatása. Habár dolgozatainak a témája sokszor egymástól messzefekvő területekre esik is, alaposabb elmélyedéssel észre lehet venni közöttük a kapcsolatot, követni lehet azt a fonalat, amely egyik területről a másikra átvezette őt vagy egy, a bizonyításokban fellépő közös gondolat, vagy a tárgynak valami belső összefüggése, vagy pedig az azonos területre való alkalmazási lehetőségek útján. Dolgozatait nem időbeli sorrendben, hanem tárgy szerinti csoportosításban akarom ismertetni, az egyes tárgyakat lehetőleg az előbb említett kapcsolatok alapján véve sorra. Minthogy célom a jutalmazott munkásságának általános képét rajzolni meg, le kell mondanom a részletek ismertetéséről. Különösképpen hangsúlyozni akarom, hogy tételeinek nagyrészét nem tudom a pontos feltételek felsorolásával szabatosan kimondani, e helyett inkább eredményeinek jelentőségéről és a problémakörbe való beilleszkedéséről akarok beszélni. Ami a részleteket illeti, utalok a jelentésem végén összeállított jegyzékben fölsorolt dolgozatokra. A jelentésemben idézett sorszámok e jegyzéknek sorszámozását adják.

Először Szőkefalvi Nagy Bélának azt a két dolgozatát akarom ismertetni, amely a Hilbert-féle tér és az ú. n. L_2 függvénytér egymásra való leképezését tárgyalja, mert ezzel kapcsolatban a legkönnyebben bevezethetem azokat a fogalmakat, amelyek a továbbiakban is sűrűn előfordulnak.

A Hilbert-féle tér elemei azok az

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

számsorozatok, amelyekre a $\sum_1^\infty x_i^2$ sor konvergens. A sor pozitív négyzetgyöke a megfelelő elem *normája*, az x_i számok az elem *koordinátái*. A térben két elem távolságát a

$$\left\{\sum_1^{\infty}(x_i-y_i)^2\right\}^{1/2}$$

nemnegatív számmal értelmezzük. A CAUCHY-féle egyenlőtlenség biztosítja, hogy bármely két elem távolsága véges, minthogy normájuk véges. A HILBERT-féle teret megszámlálható sok dimenziós vektortérnek fogva fel, minden vektora előállítható egymásra ortogonális egységvektorokból az

$$r = x_1 r_1 + x_2 r_2 + x_3 r_3 + \cdots$$

alakban. E vektorok összeadása és kivonása az n dimenziós tér vektorain végzett műveletekhez hasonlóan a koordinátákon végzendő; maguk az egyes koordináták mint az r és r_i vektor belső szorzatai adódnak:

$$x_i = (r, r_i).$$

Az L_2 függvénytér elemei azok a függvények, amelyek valamely véges vagy végtelen, mérhető halmazon, az ú. n. alaphalmazon, h-n, vannak értelmezve, e halmazon mérhetők és négyzetük a LEBESGUE-féle értelemben integrálható. Két ilyen függvényt a tér ugyanazon elemének tekintünk, ha csak egy 0-mértékű halmazon különböznek egymástól. E térben a távolságot az

$$\int_h (f(s)-g(s))^2 ds$$

integrál nemnegatív négyzetgyökével értelmezzük. Most a CAUCHY-SCHWARTZ-féle egyenlőtlenség biztosítja bármely elempár távolságának a véges voltát.

A HILBERT-féle tér vektorainak valamely ortogonális egységvektor-rendszer segélyével való előállításához hasonlóan az L_2 függvénytér elemeit is előállíthatjuk egy ortogonális, teljes függvényrendszer elemeivel. A

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \varphi_3(s), \ldots$$

függvényrendszert ortogonálisnak és normáltnak mondjuk, ha

$$\int_h \varphi_p(s)\varphi_q(s)ds = \delta_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{ha } p = q \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

A rendszer *teljes*, ha a térnek az identikusan eltűnő függvényén kívül semmilyen más függvényére sem lesz egyidejűleg

$$\int_h f(s)\varphi_p(s)ds = 0$$

minden p-re. A teljes rendszer egyúttal *zárt* is olyan értelemben, hogy az L_2-tér minden eleme előállítható a teljes rendszer elemeinek a segélyével:

$$f(s) \sim \sum_1^\infty c_p \varphi_p(s)$$

alakban. Az előállítást itt nem érthetjük úgy, hogy a jobboldali végtelen sor a közönséges értelemben konvergál, akár egy 0-mértékű halmaztól eltekintve is, az $f(s)$-hez, hanem, hogy a részletösszegeknek az $f(s)$-től való távolsága 0-hoz tart, vagyis

$$\int_h [f(s) - \sum_1^n c_p \varphi_p(s)]^2 ds \to 0.$$

Ezt a tulajdonságot úgy is mondjuk, hogy a sor *átlagban* megközelíti az $f(s)$ függvényt.

Minden c_p együttható vagy FOURIER-*állandó* itt is a függvénynek és az alaprendszer elemeinek belső szorzata:

$$c_p = \int_h f(s)\varphi_p(s)ds.$$

Ezek az állandók egy 0-mértékű halmaz kivételével egyértelműleg meghatározzák az $f(s)$ függvényt és négyzetösszegük a függvény négyzetintegrálját adja meg:

$$\sum_1^\infty c_p^2 = \int_h f(s)^2 ds.$$

E szerint a c_p együtthatók a HILBERT-féle tér egy elemének a koordinátái. A RIESZ—FISCHER-tétel szerint, ha a Σc_p^2 sor konvergens, van mindig lényegében egy olyan függvény az L_2 térben, melynek a c_p együtthatók a FOURIER-állandói a megadott $\varphi_p(s)$ teljes, ortogonális rendszerre vonatkozólag. Tehát a HILBERT-tér elemei és az L_2-tér függvényei között egy-egyértelmű hozzárendelés lehetséges. Minden teljes ortogonális függvényrendszer az L_2-nek egy ilyen leképezését adja a HILBERT-térre. Ez a leképezés *távolságtartó*, amit úgy is kifejezhetünk, hogy a megfelelő belsőszorzatok egyenlők egymással:

$$(f, g) = \int_h f(s)g(s)ds = \sum_1^\infty c_p d_p.$$

(PARSEVAL-RIESZ-formula). E két tér ilyen tökéletes megfelelkezése miatt tekinthetjük az L_2 teret az absztraktabb HILBERT-tér egy *realizálásának* is, vagy pedig mind a két teret az axiomatikusan definiált, absztrakt HILBERT-tér egy-egy realizálásának.

Az ortogonális függvényrendszer fogalmát általánosíthatjuk még azzal, hogy az ortogonalitást a közönséges LEBESGUE-féle integrál helyett valamely LEBESGUE-STIELTJES-féle integrállal, tehát az

$$\int_h \varphi_p(s)\varphi_q(s)d\sigma(s) = \delta_{pq}$$

egyenlettel definiáljuk, ahol $\sigma(s)$ növekvő függvény. Sőt figyelembe vehetünk komplex értékü függvényeket is, ezekre az ortogonalitás föltételét az

$$\int_h \varphi_p(s)\bar{\varphi}_q(s)d\sigma(s) = \delta_{pq}$$

egyenlet adja meg, ahol $\bar{\varphi}$ a φ konjugáltját jelenti. Az ilyen ortogonális függvényrendszert a valóstól való megkülönböztetésül *uniter-ortogonális*nak nevezzük. Az L_2-tér elemei ebben az esetben azok a h halmazon mérhető függvények, amelyekre az

$$\int_h |f(s)|^2 d\sigma(s)$$

integrál véges. Az így értelmezett L_2-tér is egy-egyértelműen, izometrikusan, sőt lineárisan leképezhető a komplex HILBERT-féle térre. A leképezés linearitása azt jelenti, hogy ha a HILBERT-tér f, g elemeinek megfelelő függvények: $f(s)$, $g(s)$, akkor az $af + bg$ elemnek az $af(s) + bg(s)$ függvény felel meg.

SZŐKEFALVI NAGY BÉLA mármost két dolgozatában azt vizsgálta, hogy mennyiben lehet a HILBERT-térnek az L_2-térre való leképezését bizonyos *részleteiben is* előírni, azaz meghatározni egy olyan teljes ortogonális függvényrendszert, amely a Hilberttér egy megadott E részhalmazát az L_2-nek egy előre megadott részhalmazába viszi át. A 13. számú dolgozatában meghatározza az E halmaz szükséges és elégséges tulajdonságát ahhoz, hogy a leképezéssel E-nek az L_2 összes karakterisztikus függvényei (a csak 0 és 1 értéket felvevő függvények) feleljenek meg, a 14. dolgozatban pedig azt az esetet vizsgálja, amikor az E halmaz képe az L_2 pozitív függvényeinek összessége.

Az első esetben a szükséges föltételek egyszerűen adódnak abból, hogy a karakterisztikus függvények lineáris kompozícióival minden függvény megközelíthető, továbbá, hogy karakterisztikus függvények monoton sorozatának határértéke maga is karakterisztikus függvény. Az első feltétel szerint E-nek H-ban mindenütt sűrűnek kell lennie, a második feltétel is E-nek egy szükséges tulajdonságát adja a monotonitás megfelelő értelmezésével. Hasonlóan van a pozitív függvények halmazát illetőleg is. A nyert szükséges föltételek elégséges voltát is sikerül Szőkefalvi Nagy Bélának bebizonyítania. A megfelelő tételek szabatos ismertetéséhez további új fogalmakat kellene bevezetnem, ezért e helyett inkább áttérek arra a kérdéskörre, amelyről Szőkefalvi Nagy Bélának legtöbb dolgozata szól s amelyhez a szükséges fogalmakat már a bevezetésben ismertettem. Ez a kérdéskör az ú. n. Haar-féle *szorzótáblázat* köré csoportosul.

A kérdés megértéséhez a hiperkomplex számok elméletének az analógiájához folyamodunk. Ismeretes, hogy valamely hiperkomplex számrendszer főegységeit ε_i-vel jelölve, a rendszer minden hiperkomplex száma:

$$\varepsilon = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$$

alakba irható, ahol az a_i együtthatók valós számok. Két ilyen hiperkomplex szám szorzatát a többtagúakra vonatkozó formális szorzási szabály szerint számíthatjuk ki, ha ismerjük a főegységeknek egymással való szorzatát. Ezeknek a megadásával, tehát egy négyzetes sémába írt *szorzótáblával*, adva van a szorzási szabály ebben a számrendszerben.

Legyen adva mármost valamely $\varphi_p(s)$ teljes ortogonális függvényrendszer, melynek elemei egyszerűség kedvéért a $\langle 0, 1\rangle$ zárt intervallumon legyenek értelmezve. Ennek a rendszernek az elemeivel az előbb mondottak szerint az L_2-tér összes elemeit az ott mondott értelemben előállíthatjuk. Tehát a $\varphi_p(s)$ függvények mintegy e függvényrendszer főegységeinek tekinthetők.

A főegységek egymással való szorzatának ismeretével bármely két függvény szorzata megadható a tényezők együtthatóiból. A főegységek szorzatának kifejtési együtthatói pedig a

$$C_{pqr} = \int_h \varphi_p \varphi_q \varphi_r ds$$

számok. Tehát a $\|C_{pqr}\|$ köbös matrix az ortogonális függvényrendszer «szorzótáblázatát» és a függvényrendszerben érvényes szorzási szabályt adja meg.

A szorzótáblázat fogalma általánosítható valamely $\sigma(s)$ monoton növekvő függvénnyel képzett integrálra vonatkozó ortogonális rendszerre is, amikor is a Fourier-együtthatók az

$$\int_h f(s)\varphi_p(s) d\sigma(s)$$

integrálok lesznek.

Fischer Ernst-től származik az a kérdés, hogy milyen tulajdonságokkal kell bírnia valamely $\|C_{pqr}\|$ köbös matrixnak, hogy e matrix egy teljes ortogonális függvényrendszer szorzótáblázata lehessen. Haar adott választ erre a kérdésre, nemcsak a teljes ortogonális, hanem az «önmagában zárt» függvényrendszer esetében is. Erre az utóbbi fogalomra a következőképpen jutunk. Hogy a szorzótáblázatra vonatkozó kérdésnek értelme legyen, ahhoz nem szükséges az ortogonális függvényrendszernek a zártsága, tehát az, hogy az L_2-tér minden eleme előállítható legyen az ortogonális rendszer elemeivel, csupán annyi kell, hogy a főegységek, a $\varphi_p(s)$ függvények bármely párjának a szorzata benne legyen az előállítható függvények öszeségében. Ezért Haar vizsgálta már a kérdést a zárt rendszeren kívül ilyen, kisebb megszorításnak eleget tevő rendszerre is. Ő *önmagában zártnak* nevezett egy ortogonális $\varphi_p(s)$ függvényrendszert, ha a rendszer által előállítható függvények között van a $\varphi_p(s)\varphi_q(s)$ szorzat minden p-re és q-ra, továbbá a konstans függvény. Haar mind a teljes, mind pedig az önmagában zárt függvényrendszerre vonatkozólag meghatározta annak a szükséges és elégséges föltételét, hogy valamely adott köbös matrix e rendszer szorzótáblázata lehessen.

Látható, hogy Haar a konstans függvény előállíthatóságának a követelésével nem érte el a megkívánható általánosságot. Ha

L_2 nem a véges, $\langle 0, 1\rangle$, hanem valamely végtelen intervallumon (például az egész egyenesen) értelmezett négyzetesen integrálható függvények terét jelenti, akkor L_2-be a konstans függvény (az identikusan eltűnő függvényt kivéve) bele sem tartozik. HAAR feltételei tehát kizárólag véges alapintervallum esetére vannak szabva.

Ebben a tekintetben tette teljessé HAAR vizsgálatait SZŐKEFALVI NAGY BÉLA, aki az önmagában zártságot úgy definiálja, hogy csak az alapfüggvények szorzatának megközelíthetőségét kívánja meg és ebben az esetben is megadja a szorzótáblázatra vonatkozó szükséges és elégséges föltételt (10. dolgozat). Ez a föltétel részben a $\| C_{pqr} \|$ köbös matrix sík-sorait, illetőleg síkoszlopait jelentő C_p négyzetes matrix bizonyos szimmetriájában és a szorzásra vonatkozó fölcserélhetőségében rejlik, lényegében a HAAR-féle föltétellel megegyezőleg. Eltérés csak egy további föltételben van, amely HAARnál éppen a konstans függvény megközelíthetőségével függ össze, míg SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁnál egyszerűen a C_p matrixok lineáris függetlenségét mondja ki, azaz azt, hogy nincs olyan konvergens négyzetösszegű, nem azonosan eltűnő

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

számsorozat, hogy

$$\sum_{(p)} x_p (C_p)_{qr} = 0$$

minden q-ra és r-re. [$(C_p)_{qr}$ a C_p négyzetes matrix q-adik sorának r-edik elemét jelenti].

A probléma tehát, mind a kérdést illetőleg az önmagában zártságnak megfelelőbb megfogalmazásával, mind pedig a szükséges és elégséges föltételnek a lineáris függetlenség által való kifejezésével, csak SZŐKEFALVI NAGY BÉLA dolgozataiban nyer megnyugtató bevégzettséget.

HAAR kiterjesztette vizsgálatait komplexértékű függvények uniter-ortogonális rendszerére is. A teljesség, illetőleg a zártság és az önmagában zártság fogalma az uniter-ortogonális rendszerekre szószerint átvihető. SZŐKEFALVI NAGY BÉLA általánosította HAARnak ezekre a rendszerekre elért eredményeit is, megint az önmagában zártság fogalmának az általa adott, általánosabb alakban való bevezetésével (11. dolgozat).

Ha a $\|C_{pqr}\|$ köbös matrix az előírt föltételeknek eleget tesz, akkor van olyan ortogonális (illetőleg uniter-ortogonális) függvényrendszer, melynek e matrix a szorzótáblázata. De általánosságban nemcsak egy ilyen rendszer van. HAAR *izomorf*nak nevezett két olyan függvényrendszert, amelynek a szorzótáblázata azonos. Egy teljes, ortogonális függvényrendszer mértéktartó leképzéssel természetesen egy önmagával izomorf rendszerbe megy át. HAAR egyik legutolsó dolgozatában mondta ki azt az állítását, hogy ez megfordítva is így van. SZŐKEFALVI NAGY BÉLA bizonyította be ennek az állításnak helyességét, hogy t. i. két egymással izomorf, teljes, ortogonális rendszer az alaphalmazok mérhető részhalmazainak mértéktartó leképezésével egymásba átvihető (7. dolgozat). Egyben azt is megmutatta, hogy az önmagában zárt ortogonális függvényrendszerre vonatkozó hasonló kérdés visszavezethető a teljes ortogonális függvényrendszer esetére. Egy későbbi (8. sz.) dolgozatában még az ortogonalitás föltételét is el ejti és tetszőleges komplex értékű függvények teljes rendszerének izomorfiáját vizsgálja és bebizonyítja, hogy ha a H alaphalmazon értelmezett $\{\varphi_p(s)\}$ zárt függvényrendszer izomorf a H'-n értelmezett $\{\varphi'_p(s)\}$ zárt függvényrendszerrel, akkor van H-nak olyan lényegében egy-egyértelmű és mértéktartó leképezése H'-re, amely az L_2 függvényosztály minden függvényét az izomorfia által hozzárendelt függvénybe viszi át.

Mindezek a tények már mutatják az önmagában zárt és a teljes, ortogonális függvényrendszerek szoros kapcsolatát. Ebben az irányban folytatott további kutatás során a 9. számú dolgozatában megmutatta SZŐKEFALVI NAGY BÉLA, hogy ha adva van egy mérhető halmazon négyzetesen integrálható függvényeknek valamely önmagában zárt rendszere, akkor mindig lehet egy olyan mértékfogalmat és annak alapján olyan integrálfogalmat értelmezni, hogy a rendszer erre az integrálfogalomra vonatkozólag teljes legyen. Ezt a tételét SZŐKEFALVI NAGY BÉLA komplex értékű függvények uniter-ortogonális rendszerére is átviszi.

Ezzel a kérdéssel rokon problémát tárgyal a 6. dolgozatában. Legyen adva egy függvénysorozat:

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ldots \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Van-e olyan nemcsökkenő korlátos függvény, $\sigma(x)$ hogy a $\sigma(x)$ szerint vett LEBESGUE-STIELTJES integrál-fogalomra vonatkozólag az adott rendszer ortogonális, teljes rendszer legyen, azaz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_p(x) f_q(x) d\sigma(x) = \delta_{pq}$$

legyen és minden a $\sigma(x)$ szerint négyzetesen integrálható függvény átlagban megközelíthető legyen az $f_p(x)$ függvények lineáris kompozícióival? SZŐKEFALVI NAGY BÉLA ezt a kérdést bizonyos speciális esetekre oldja meg, nevezetesen, amikor az $f_p(x)$ függvények periodikusak és a $\langle 0, 1\rangle$ perioduson a közönséges LEBESGUE-féle integrál alapulvételével, teljes, ortogonális rendszert adnak, tehát például a $\{\cos kx, \sin kx\}$ rendszer esetére.

Az ortogonális függvényrendszerek nagy szerepet játszanak SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁnak néhány csoportelméleti dolgozatában is. Legyen $\mathfrak{G}$ valamely megszámlálható sok elemből álló ABEL-féle csoport. E legyen az egységelem, A, B, C,..., P,... jelölje a többi elemeket. A komplex, egységnyi abszolút értékű számoknak egy

$$\chi_E, \chi_A, \chi_B, \ldots, \chi_P, \ldots$$

rendszerét a $\mathfrak{G}$ csoport *jellemzőjének* (karakterisztikájának) mondjuk, ha

$$\chi_P \cdot \chi_Q = \chi_{P.Q}.$$

HAAR mutatta meg, hogy mindig van olyan komplex értékű függvényrendszer:

$$\chi_E(t), \chi_A(t), \chi_B(t), \ldots, \chi_P(t), \ldots$$

melynek függvényei a $\langle 0, 1\rangle$ zárt köz valamely zárt részhalmazán vannak értelmezve, továbbá egy ugyanott értelmezett LEBESGUE-STIELTJES-féle mértékfogalom, úgy, hogy ez a függvényrendszer minden t-re a csoportnak egy jellemzőjét adja és a $\chi_P(t)$ függvények értelmezési tartományuk minden helyén folytonosak, továbbá az említett mértékfogalomra vonatkozólag teljes, uniter-ortogonális rendszert alkotnak.

HAAR ezt a tételt meglehetősen súlyos segédeszközök felhasználásával bizonyította be. SZŐKEFALVI NAGY BÉLA (12. dolgozatában) ezeknek az elkerülésével eléggé elementárisnak mondható bizonyítást adott erre a tételre és a jellemző függvényrendszernek még több olyan tulajdonságára is rá tudott mutatni, amely HAARnál nem fordult elő.

SZŐKEFALVI NAGY BÉLA többi csoportelméleti dolgozatainak alaposabb ismeretéhez igen sok fogalmat kellene előbb bevezetnem, ezért legyen szabad csak egy dolgozatát emelnem ki.

A LIE-féle folytonos csoportok matrix-előállításának elméletében alapvető tétel az, hogy ha az előállító matrix-csoport matrixelemei a LIE-féle csoport paramétereinek folytonos függvényei, akkor a matrix-csoport «analitikus», azaz infinitezimális lineáris transzformációkból leszármaztatható. Mármost SZŐKEFALVI NAGY BÉLA a 4. dolgozatában kimutatja, hogy e tételben a folytonosság feltétele egy lényegesen kevésbbé megszorító föltétellel, a mérhetőség föltételével helyettesíthető. A részletekbe való behatolás helyett legyen szabad csak annyit megemlítenem, hogy ezt a tételét kiterjeszti végtelen ú. n. korlátos, normális matrixokkal való csoport-előállítások esetére is. Ennél szüksége volt, mint segédeszközre, STONEnak egy néhány év előtt talált tételére, mely a HILBERT-tér egy-paraméterű uniter transzformációcsoportjainak analitikus előállítására vonatkozik. Erre a tételre STONEon kívül még mások is adtak bizonyítást, SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁnak azonban sikerült a tételt a megelőzőknél egyszerűbb meggondolással bebizonyítania. Azóta az egyik részleteredményét, a HERMITE-féle transzformáció-csoportok analitikus előállítására vonatkozót, HILLE és őmaga (19. dolgozatában) kiterjesztette az ú. n. félcsoportokra is. SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁnak a LIE-féle csoportok mérhető előállítására vonatkozó tételét azóta HILLE újból bebizonyította, A. WEIL pedig a tétel egy részét (t. i. azt, hogy a mérhető előállítások folytonosak,) kiterjesztette a LIE-féle folytonos csoportok esetéről általános folytonos csoportokra.

A csoportelmélet körében foglalkozott még SZŐKEFALVI NAGY BÉLA (5. dolgozat) a folytonos csoportok HAAR-féle invariáns mérték-fogalmával is és egyszerű okoskodással bebizonyította ennek a mértéknek unicitását kompakt, valamint lokálisan kompakt, ABEL-féle csoportok esetében. Erre már nem térhetek ki, most még csak a transzformált trigonometrikus sorokról szóló dolgozatait akarom röviden ismertetni, amelyekben, véleményem szerint, igen jelentős eredményeket ért el.

Ezekhez a vizsgálataihoz az impulzust H. BOHR dán matematikusnak, a majdnem periodikus függvények elmélete megteremtőjének egy tétele szolgáltatta. E szerint, ha az $f(x)$ majdnem periodikus függvényre $|f(x)| \leqq 1$ és a függvény

$$\sum_k (a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x) \tag{1}$$

FOURIER-sorában fellépő λ_k «frekvenciákra» $\lambda_k \geqq m > 0$, akkor a tagonként való integrálással keletkező

$$\sum_k \frac{1}{\lambda_k}(a_k \sin \lambda_k x - b_k \cos \lambda_k x) \tag{2}$$

sor által értelmezett $F(x)$ integrálfüggvényre $|F(x)| \leqq \frac{\pi}{2m}$, ahol a jobboldali konstans pontos. BOHR ezt a tételt a komplex függvénytanon át származtatta; első «valós» bizonyítását FAVARD francia matematikus találta, aki először a periodikus $f(x)$ könnyű esetére adott nagyon egyszerű bizonyítást és ebből ment át aránylag nehéz meggondolással az általános esetre. A 18. (STRAUSZ ANTALlal, aki az egyik segédtételre adott szellemes bizonyítást, együtt közölt) dolgozatában SZŐKEFALVI NAGY BÉLA egy ugyancsak valós úton haladó bizonyítást ad, amelynek a FAVARDéval szemben megvan az az előnye, hogy közvetlenül szolgáltatja a BOHR-féle tételt s egyben annak FOURIER-integrálok esetére való kiterjesztését is.

A továbbiakban, egyszerűség kedvéért, szorítkozzunk arra az esetre, amikor $f(x)$ 2π szerint periodikus, $|f(x)| \leqq 1$ és $f(x)$ FOURIER-sora $\cos mx$-et és $\sin mx$-et tartalmazó tagokkal kezdődik:

$$f(x) \sim \sum_{k=m}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1'}$$

Az ilyen függvényekről röviden azt mondjuk, hogy a K_m osztályba tartoznak. Ekkor $F(x)$ FOURIER-sora:

$$F(x) \sim \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k}(a_k \sin kx - b_k \cos kx), \tag{2'}$$

tehát az (1') sor konjugált sorának az $\frac{1}{k}$ «faktorsorozattal» való transzformáltja.

SZŐKEFALVI NAGY BÉLA most már felveti a kérdést, általánosítható-e BOHR-féle tétel abban az irányban, hogy az $\frac{1}{k}$ faktorsorozat helyébe általánosabb ϱ_k faktorsorozatok lépjenek?

Hogy eredményeit megfogalmazhassuk, idézzük emlékezetbe, hogy valamely c_k sorozatot monoton fogyónak mondunk, ha a $\Delta_k^{(1)} = c_k - c_{k+1}$ különbségek sorozata nemnegatív; kétszeresen monotonnak (vagy konvexnek), ha még a különbségek különbségei, tehát a $\Delta_k^{(2)} = \Delta_k^{(1)} - \Delta_{k+1}^{(1)}$ mennyiségek is nemnegatívok; háromszorosan monotonnak, ha ezenfelül még a $\Delta_k^{(3)} = \Delta_k^{(2)} - \Delta_{k+1}^{(2)}$ különbségek is nemnegatívok. Ha így tovább, az összes különbségek nemnegatívok, a c_k sorozatot *abszolút* (vagy *totálisan*) *monotonnak* mondjuk. Az $\frac{1}{k}$ sorozat például abszolút monoton.

SZŐKEFALVI NAGY BÉLA 15. dolgozatában mármost kimutatja, hogy *ha a K_m osztályba tartozó $f(x)$ függvény* (1') *alatti* FOURIER-*sorát tetszésszerinti abszolút monoton, 0-hoz tartó ϱ_k faktorsorozattal transzformáljuk, a kapott*

$$\sum_{k=m}^{\infty} \varrho_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{3}$$

sor egy olyan $f^*(x)$ folytonos függvényt állít elő, amelyre

$$|f^*(x)| \leqq \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \varrho_{(2\nu+1)m} \tag{4}$$

Ha pedig még feltesszük azt is, hogy $\sum_k \frac{\varrho_k}{k}$ konvergens, akkor a

$$\sum_{k=m}^{\infty} \varrho_k (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \tag{5}$$

sor egy olyan $f^{**}(x)$ fügyvényt állít elő, amelyre

$$|f^{**}(x)| \leqq \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} \varrho_{(2\nu+1)m}. \tag{6}$$

A (4)*-ben és a* (6)*-ban szereplő konstansok pontosak.*

A $\varrho_k = \frac{1}{k}$ speciális esetben (6) jobboldala $\frac{\pi}{2m}$-mel egyenlő, tehát újra nyerjük a BOHR-féle tételt. De magukban foglalják további speciális esetekként SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁnak ezek az eredményei a BOHR-féle tételen kívül annak az n-edik iterált integrálfüggvényre vonatkozó, S. BERNSTEIN, FAVARD, ACHYESER és KREIN által időközben talált általánosításait $\left(\varrho_k = \frac{1}{k^n}\right.$ esete$\left.\right)$, valamint H. A. SCHWARZ és KOEBE néhány régebbi, az egységkörben harmonikus függvényekre vonatkozó eredményét is ($\varrho_k = r^k$ esete).

Később, 16. és 20. dolgozatában SZŐKEFALVI NAGY BÉLA ezeket az eredményeit még lényegesen továbbfejleszti azáltal, hogy kimutatja, hogy *a* (4), *ill. a* (6) *egyenlőtlenség érvényben marad akkor is, ha a* ϱ_k *faktorsorozatról az abszolút monotonitás helyett csupán háromszoros, ill. kétszeres monotonitást tételezünk fel.*

Így kiterjesztett tételeinek alkalmazásaként többek között meghatározza a K_m osztályba tartozó $f(x)$ függvények FOURIER-sorának, valamint a konjugált sornak CESÀRO-közepeire a pontos korlátokat.

SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁnak e téren nyert eredményei a trigonometrikus polinomokkal való legjobb megközelítés problémájára is alkalmazhatók (20. dolgozat). További részletek helyett csak azt jegyezzük meg, hogy 21. dolgozatában átviszi eredményeit majdnem periodikus függvények és FOURIER-integrálok esetére is.

Dolgozatainak egy további csoportjában (23., 26. és 27.) integrálokra, ill. sorokra vonatkozó más típusú egyenlőtlenségekkel foglalkozik.

A 23. dolgozatban azt a kérdést vizsgálja, milyen következtetések vonhatók le egy, az egész egyenesen értelmezett $f(x)$ függvény korlátjaira vonatkozólag az $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^\alpha dx$ integrál értékének (α adott pozitív szám), valamint az $f(x)$ n-edik differenciálhányadosa korlátjainak az ismeretéből. A kérdésre az $n=1$ és $n=2$ esetekben megadja a teljes választ.

A 26. dolgozatban SZŐKEFALVI NAGY BÉLA valamely függvény és differenciálhányadosa közt fennálló bizonyos integrálegyenlőtlenségekre jut, melyekben a szereplő konstansok pontosak, és minden esetben megadja azokat a függvényeket is, amelyekre az egyenlőség jele érvényes. Az egyik egyenlőtlenség különös esetben, lényegében CARLSON egy integrálegyenlőtlenségére redukálódik.

A 27. dolgozatában CARLSONnak egy más egyenlőtlenségét pontosítja és terjeszti ki, továbbá bebizonyít még néhány rokonfelépítésű egyenlőtlenséget is.

SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁnak vannak geometriai tárgyú dolgozatai is. Az egyikben (17. dolgozat) SZŐKEFALVI NAGY GYULA bizonyos vizsgálataihoz csatlakozva, sokszögek néhány kombinatorikus tulajdonságáról szól; a másikban (24. dolgozat) arra a kérdésre ad választ, mekkora lehet egy több testből álló rendszer összes köbtartalma, ha bármely irányú egyenesre való vetületének összes hossza bizonyos korlát alatt marad. A következő, szintén geometriai tárgyú észrevételét feladatként tűzte ki az American Mathematical Monthly-ban (25. sz.): A síkban a háromszög, a térben a tetraéder az egyetlen olyan poligon, ill. poliéder, amelynek egyetlen átlója sincs; ezzel szemben a 4- vagy a még többméretű térben van a szimplexen kívül más, átló nélküli, konvex politop is.

E rövid ismertetés is mutatja, hogy SZŐKEFALVI NAGY BÉLA a matematika igen kiterjedt területén, számos kérdésben ért el elismerésre méltó eredményt. Nagy termékenységét fiatal korával egybevetve azt kell gondolnunk, hogy minden olyan gondolatkörben, amelybe ideje volt elmélyedni, tudott a meglévő eredményekhez újat hozzátenni vagy rajtuk javítani. Általánosításai nem érdektelen felhígítások, hanem az ismert kérdéseknek jó matematikai ízléssel való természetes kiterjesztései, megoldásai a legtöbb esetben a kérdés hiány nélkül való elintézését adják. A bizonyításokban alkalmazott módszerei pedig nagy önállóságra mutatnak. Dolgozatainak előadásmódja tömör, ami olvasásukat nem teszi könnyűvé. Ez a tömörség a nagy termékenységben lelheti magyarázatát és sohasem megy a világosság vagy éppen a szabatosság rovására.

Mindezek a tulajdonságok, melyek SZŐKEFALVI NAGY BÉLÁnak matematikai invenciójára és tehetségére vallanak, teszik indokolttá, hogy iránta való elismerésünket az egyik Kőnig Gyula-jutalom odaítélésével fejezzük ki.

Annak az elismerésnek jellemzésére, amelyet SZŐKEFALVI NAGY

BÉLA az ismertetett munkásságával magának másutt is kivívott, felemlítem, hogy az «Ergebnisse der Mathematik» szerkesztősége megbízta őt a «Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes» címü kötet megírásával. Ennek egy részét alkalmam volt a levonatban olvasni. Ismertetésére nem térhetek ki, talán mint még megjelenőfélben levő dolgozat nem is tartozik a referátum tárgyai közé. Említését csupán a szerzője matematikai munkásságának jellemzésére annyiból tartom fontosnak, hogy tanújelét látom benne annak, hogy SZŐKEFALVI NAGY BÉLA nemcsak egyes problémák megoldásában és különleges tárgyú dolgozatok megírásában tűnik ki, hanem megvan a képessége egy egész elmélet összefoglaló feldolgozására is. Ehhez pedig a dolgozataiban már elárult matematikai érzéken kívül széleskörü tájékozottság, nagy áttekintés, rendszerező készség és helyes értékelési ítélet is szükséges. Örömömre szolgál, hogy ezzel a felismeréssel egészíthetem ki azt a képet, amelyet SZŐKEFALVI NAGY BÉLA matematikai alkotó erejéről a megelőzőkben rajzoltam meg.

Szőkefalvi Nagy Béla dolgozatainak jegyzéke.

1. Ein Verfahren zur Gewinnung von Atomformfaktoren, *Zeitschrift für Physik*, **91** (1934), 105—110.
2. Berechnung einiger neuen Atomformfaktoren, *Zeitschrift für Physik*, **94** (1935), 229—230.
3. Zweite Lösung der Aufgabe 146 (R. FRUCHT), *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **44** (1934), *23—24*.
4. Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen, *Mathematische Annalen*, **112** (1936), 286—296.
5. Sur la mesure invariante dans des groupes topologiques, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **202** (1936), 1248—1250.
6. Über eine Frage aus der Theorie des orthogonalen Funktionensysteme, *Mathematische Zeitschrift*. **41** (1936), 541—544.
7. Izomorf függvényrendszerekről, *Mat. és Term.-tud. Értesítő* **54** (1936), 712—735.
8. Über isomorphe vollständige Funktionensysteme, *Mathematische Zeitschrift*, **43** (1937), 1—16.
9. Über in sich abgeschlossene Funktionensysteme, *Mathematische Zeitschrift*, **43** (1937), 17—31.
10. Önmagában zárt orthogonális függvényrendszer szorzótáblázatáról, *Mat. és Term.-tud. Értesítő*, **55** (1937), 574—591.

11. Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems, *Annali di Pisa*, **6** (1937), 211—224.

12. Zur Theorie der Charaktere Abelscher Gruppen, *Mathematische Annalen*, **114** (1937), 373—384.

13. Über die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen im Hilbertschen Funktionenraum, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **8** (1937), 166—176.

14. On the set of positive functions in L_2, *Annals of Mathematics*, **39** (1938), 1—13.

15. Propriétés extrémales des séries de Fourier transformées par des suites absolument monotones, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **206** (1938), 808—811.

16 Sur des suites de facteurs multiplement monotones, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **206** (1938), 1342—1344.

17. Projektív sokszögekről és sokoldalakról, *Mat. és Term.-tud. Értesítő*, **57** (1938), 105—120.

18. Egy Bohr-féle tételről (STRAUSZ ANTALlal együtt), *Mat. es Term.-tud. Értesítő* **57** (1938), 121—135.

19. On semi-groups of selfadjoint transformations in Hilbert space, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **24** (1938), 559—560.

20. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, I. Periodischer Fall, *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften*, **90** (1938), 103—134.

21. Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen, II. Nichtperiodischer Fall, *Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften*, **91** (1939), 3—24.

22. Solution of the problem 3763 (P. ERDŐS), *The American Mathematical Monthly*, **46** (1939), 176—177.

23. Sur un problème d'extremum pour les fonctions définies sur tout l'axe réel, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **208** (1939), 1865—1867.

24. Über ein geometrisches Extremalproblem, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **9** (1940), 253—257.

25. Problem 3909. *The American Mathematical Monthly*, **46** (1939), 238; megoldásai *u. o.* **48** (1941), 81—82.

26. Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **10** (1941), 64—74.

27. Egy Carlson-féle és néhány azzal rokon egyenlőtlenségről, *Matematikai és Fizikai Lapok*, **48** (1941), 162—175.

28. Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Bd. V. Heft 5. (Sajtó alatt).

*

Úgy hisszük, hogy a fentiek kellően igazolják a Társulat ama döntését, mellyel 1942. évi két Kőnig Gyula jutalmát Hajós Györgynek és Szőkefalvi Nagy Bélának ítélte oda.

Rédei László és *Veress Pál.*

BERICHT ZUR VERTEILUNG DES JULIUS KŐNIG-PREISES VOM JAHRE 1942.

Die Budapester Loránd Eötvös Mathematische und Physikalische Gesellschaft hat je einen Julius Kőnig-Preis für 1942. Dr. Georg Hajós und Dr. Béla von Sz. Nagy zuerkannt. Die Mitglieder der Kommission waren: E. Egerváry, L. Fejér, B. v. Kerékjártó, D. Kőnig, L. Rédei und P. Veress. Die Hauptleistung von Hajós war der Beweis der sog. Minkowskischen Vermutung, während die Arbeiten von Sz. Nagy sich grösstenteils auf die Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, der Operatoren und der unendlichen Gruppen beziehen. Hier geben die Referenten, L. Rédei und P. Veress eine Analyse und Würdigung der mathematischen Leistungen beider preisgekrönten Mathematiker. Die vollständige Liste ihrer Arbeiten wurde den Referaten hinzugefügt.

AZ ERGODIKUS ELMÉLET NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL.

Bevezetés.

Az ú. n. ergodikus elmélet, amely a kinetikus gázelméletből és a statisztikus mechanikából fakadt és amely évtizedeken át nagyobb részben sejtésekből, e sejtések alkalmazásából és kritikájából állt, 1931-ben váratlan fellendülésnek indult. Poincaré már 1899-ben arra alapította jól ismert visszatérési tételét, hogy konzervatív dinamikus rendszert jellemző differenciálegyenletek integrálgörbéinek időbeli viselkedése lényegében ugyanaz, mint egy zárt edényt megtöltő, stacionáriusan áramló, össze nem nyomható folyadék pályagörbéié.[1] Csupán a térfogat szerepét kell a megfelelő invariáns integráloknak átadni, az edény szerepét pedig a fázistér vagy annak egy energiafelülete, tehát egy esetleg magas dimenziószámú ponthalmaz játssza. Azóta kiderült, hogy a valós függvénytan módszereivel a dimenziószámot bizonyos természetesen kínálkozó és a lényeget nem befolyásoló engedmények révén akár 1-re is lehet redukálni. Szemléletesség kedvért maradjunk a közönséges térben. Össze nem nyomható folyadékról lévén szó, a kérdéses áramlás úgy tekinthető, mint mértékmegtartó, vagyis az egyes térfogatrészek mértékén nem változtató *pontátalakításoknak* a t időtől függő csoportja. A legfontosabb sejtés, amely igazolásra várt, az volt, hogy az egyes P pontok P_t pályagörbéinek megadott térrészben eltöltött átlagos ideje létezik majdnem minden P-re, azaz legfeljebb a P pontok egy térbeli 0-mértékű halmazának kivételével. Más szóval, az az idő, amit a változó P_t pont a megadott E térfogatrészben a $(0, \tau)$ időközből eltölt, τ-val osztva, meghatározott határérték felé tart,

[1] Poincaré 1. (L. az irodalmat a dolgozat végén.)

ha $\tau \to \infty$. Tekintsük az E halmaz karakterisztikus függvényét, vagyis azt az $f(P)$ függvényt, mely az E halmazon mindenütt 1, egyebütt 0; ennek a függvénynek segítségével a sejtés úgy is fogalmazható, hogy az $f(P_t)$ függvénynek, mint t függvényének, a $(0, \tau)$ közre képezett integrálközépértéke majdnem minden P esetében határérték felé tart. Ez a megfogalmazás, amelyben az $f(P)$-ből $f(P_t)$-re való átmenet, tehát most már *függvényátalakításoknak* csoportja szerepel, kapcsolatba hozza az ergodikus elméletet a függvényterek lineáris átalakításainak elméletével. Erre a kapcsolatra 1931 márciusában hívta föl a figyelmet KOOPMAN,[2] majd kevéssel utóbb tőle függetlenül CARLEMAN[3] és ennek a kapcsolatnak révén sikerült néhány hónappal később NEUMANN JÁNOS-nak megmutatnia, hogy a kérdéses határérték valóban létezik, legalább is abban az értelemben, hogy a mondott integrálközépérték mint P függvénye négyzetintegrálra erősen (en moyenne) tart egy $\varphi(P)$ limeszfüggvényhez.[4] Néhány héttel később azután G. D. BIRKHOFF-nak, aki NEUMANN eredményét szóbeli közlésből ismerte meg, sikerült egészen másszerű, szinte hajszálfinom meggondolással az egyes pályagörbékre különkülön is érvényes összetartást bebizonyítania, legalább is majdnem minden pályagörbére.[5] A fizikai alkalmazások szempontjából nevezetes és sokat vitatott másik sejtés az volt, hogy a $\varphi(P)$ átlagos időtartam általában, azaz bizonyos szinguláris lehetőségek kizárásával (mint pl., hogy az edényben ne legyen elválasztó fal), majdnem minden P pontra ugyanaz, tehát, hogy $\varphi(P)$ ebben az értelemben állandó; pontosabban, hogy az időátlag egyenlő a térfogatátlaggal, t. i. az E halmaz térfogatának az össztérfogathoz való viszonyával. Az ebben a gondolatmenetben szereplő kritériumnak, az ú. n. metrikus tranzitivitásnak, melyről majd az 5. pontban röviden szólunk, szükséges és elegendő volta közvetlenül adódik akár NEUMANN, akár BIRKHOFF eredményéből. Gyakorlati ellenőrzése az egyes esetekben általában nem könnyű feladat és eddig még csak kevés problémára sikerült.

---

2 KOOPMAN 1.
3 CARLEMAN 1.
4 NEUMANN 1.
5 G. D. BIRKHOFF 1, 2; BIRKHOFF—KOOPMAN 1.

A következőkben tisztán matematikai szempontból ismertetjük BIRKHOFF és NEUMANN tételeit és ezek bebizonyítását, néhány általánosítással és rokon problémával együtt. Nincs elég helyünk arra, hogy az elmult 10 év kiterjedt idevágó irodalmát is részletesen ismertessük; különösen nem térhetünk rá a legújabb, elvont irányú általánosításokra.[6] Talán némiképpen pótolja ezt a legfontosabb dolgozatoknak cikkünk végén összeállított jegyzéke és az azokban található további utalások.

BIRKHOFF tételének itt előadott bizonyítása lényegében az eredeti bizonyítás, amelyet E. HOPF, KHINTCHINE, KOLMOGOROFF és legutóbb YOSIDA és KAKUTANI egyszerűsítettek[7] és amelyet itt tovább egyszerűsítek azáltal, hogy a meggondolás leglényegesebb eszközét, a II. segédtételt a teljesen elemi I. segédtételből származtatom. A meggondolást itt is és NEUMANN tételére is a tételeknek azon a leegyszerűsített, de velük egyenértékű alakján részletezem, melyben a folytonos átalakításcsoport szerepét egyetlen átalakítás iteráltjai veszik át.

BIRKHOFF tétele után HOPF egy valamivel általánosabb tételét tárgyalom, mely ugyanazokból a segédtételekből ugyancsak közvetlenül adódik.

NEUMANN tételére a különböző szerzők által adott nagyszámú bizonyítás közül két nagyon egyszerű saját bizonyításomat ismertetem. Mind a kettőnek még az is előnye, hogy módszerük könnyen fölhasználható lényeges általánosítások és rokon kérdések tárgyalására is. Az elsőhöz GARRETT BIRKHOFF-nak, G. D. BIRKHOFF fiának egy bizonyítása,[8] a másodikhoz YOSIDÁ-é és egy régebbi saját bizonyításom[9] állnak legközelebb.

Birkhoff tétele és általánosításai.

1. Mindenekelőtt két segédtételt fogok bebizonyítani.

I. *Adva van az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valós számokból álló véges sorozat. Nevezzük az ugyancsak megadott m pozitív egész*

---

[6] G. BIRKHOFF 1; KAKUTANI 2, 3; LORCH 1; ALAOGLU—BIRKHOFF 1; YOSIDA 3; CARATHÉODORY 1; RIESZ 2.

[7] HOPF 1; KHINTCHINE 1; KOLMOGOROFF 1; YOSIDA—KAKUTANI 1.

[8] G. BIRKHOFF 2.

[9] YOSIDA 1; RIESZ 1.

számra nézve «jó» kezdő tagoknak azokat az a_k tagokat, amelyekből elinduló, legfeljebb m egymásra következő tagból álló $a_k + a_{k+1} + \cdots$ «részösszegek» közül legalább egy pozitív. Akkor az összes, a megadott m-re nézve jó kezdő tagok összege ugyancsak pozitív.

Bizonyítás. Könnyebb kifejezésmód kedvéért hosszabbítsuk meg a sorozatot az $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{n+m-1} = 0$ új tagokkal; világos, hogy a jó kezdő tagok ugyanazok maradnak. Legyenek az egymásra következő $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l$ jó kezdő tagok, de már a_{l+1} ne legyen az. Megmutatjuk, hogy

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l > 0.$$

Ugyanis tekintsük az a_k-val kezdődő, legfeljebb a_{l+m-1}-ig terjedő részösszegek közül a legnagyobb értékűt, vagy ha több ilyen van, akkor közülük a leghosszabbat; utolsó tagja legyen a_p. Akkor mindenekelőtt, a fortiori,

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_p > 0.$$

Nem lehet $p < l$, mert akkor a_{p+1} még jó kezdő tag, van tehát legfeljebb m tagú $a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots$ «jó» részösszeg; ennek utolsó mutatója $< l + m$; az $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_p$ összeget az utóbbival folytatva nagyíthatjuk; ellenmondás. Ha $p > l$, tehát $p = l + r$, $0 < r < m$, akkor, mivel a_{l+1} nem jó kezdő tag, azért

$$a_{l+1} + a_{l+2} + \cdots + a_p \leqq 0,$$

tehát

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l \geqq a_k + a_{k+1} + \cdots + a_p > 0;$$

tehát állításunk helyes. Végre, ha $p = l$, akkor állításunk nyilvánvaló.

Segédtételünk most már rögtön adódik abból, hogy a jó kezdő tagok összessége vagy már maga is egy az imént tekintett jellegű, tehát pozitív összegű $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l$ sorozat, vagy több ilyenre esik szét.

Megjegyzés. A segédtételben, föltevésében és állításában, a «pozitív» jelző helyébe a «nem negatív» követelést tehetjük; a bizonyítás szinte szószerínt ugyanaz. A következőkben is egyideig egyformán dolgozhatnánk a kétféle követeléssel; az egyenlőség megengedése csak akkor válik kényelmetlenné, amikor a k mutató szerepét folytonosan változó paraméternek adjuk át.

Nem alkalmazható folytonos paraméter esetére a következő egyszerűbb bizonyítás gondolatmenete sem. Legyen a_{k_1} az első jó kezdőtag és legyen $a_{k_1} + a_{k_1+1} + \cdots + a_{l_1}$ az evvel kezdődő pozitív részösszegek közül a legrövidebb. Világos, hogy ennek az összegnek minden tagja jó kezdőtag. Legyen a_{k_2} a még hátralevő jó kezdőtagok közül az első és tekintsük a vele kezdődő pozitív részösszegek közül a legrövidebbet. Az eljárást addig folytatjuk, amig az összes kezdőtagokat fölhasználtuk.

II. *Legyen T a mérhető Ω halmaznak egy önmagába vagy egy részébe való mértékmegtartó átalakítása, $f_1(P)$ pedig egy az Ω halmazon integrálható függvény. Jelentse E azoknak a P pontoknak a halmazát, melyekre*

$$\sup_{k=1,2,\ldots} \sum_{i=1}^{k} f_i(P) > 0 \qquad \left(f_{i+1}(P) = f_1(T^i P)\right)$$

vagyis amelyekre van legalább egy olyan k érték, melyre a felírt összeg pozitív. Akkor

$$\int_E f_1(P) \geqq 0.^{10} \tag{1}$$

Mindenekelőtt néhány magyarázó megjegyzést.

A mértékfogalom és az ennek megfelelő integrálfogalom, amelyekkel dolgozunk, lehet a Lebesgue-féle, egy- vagy többméretű térben vagy pl. egy felületen; lehet ennek az integrálnak egy halmazon megadott $d\Omega$ pozitív tömegeloszlásra értelmezett ismert általánosítása. Egyszerűség kedvéért az integrálokban a szokásos $d\Omega$ végződést elhagyjuk. Mérhetőnek mondunk egy halmazt, ha vagy véges mértékű, vagy pedig, ha nem ilyen ugyan, de ilyenek végtelenbe menő sorozatának egyesítése; az utóbbi esetben a halmaz végtelen mértékű. Az E halmaz mértékét mE-vel jelöljük. Integrálható egy halmazon egy $f(P)$ függvény, ha integrálja és vele együtt $|f(P)|$ integrálja is véges. Tehát például az $f(P) \equiv 1$ függvény végtelen mértékű halmazon nem integrálható.

A T átalakításról a megszokottól eltérően nem tesszük fel, hogy megfordíthatóan egyértelmű, csak azt, hogy egyértelmű.

---

[10] Yosida—Kakutani 1, ahol lényegében ugyanez a tétel szerepel «the maximal ergodic theorem» néven.

A «mértékmegtartó» jelző ebben az esetben a következőt jelenti. Legyen E egy tetszésszerinti mérhető halmaz és TE az E halmaz P pontjaiból adódó TP pontok összessége. Ha E egyszersmind a TE halmaz teljes eredetije, $E=T^{-1}(TE)$, azaz, ha E mindazokat a P pontokat magában foglalja, amelyeknek TP megfelelői a TE halmazba esnek, akkor E és TE mértéke megegyezik. Ezt jelentse a «mértékmegtartó« jelző. Pl. ilyen értelemben mértékmegtartó a $0 \leqq x < 1$ köznek az az átalakítása, mely minden x-hez $10x$ tört részét rendeli. Erre a speciális esetre a majd bebizonyítandó tétel, tehát lényegében BIRKHOFF tétele, BOREL ismert eredményére redukálódik, mely szerint majdnem minden x szám végtelen tizedestört alakjában a $0, 1,\ldots, 9$ jegyek egyenlő átlaggal oszlanak el, azaz minden egyes jegyre annak az első n tizedesjegy közt való előfordulásának száma n-nel osztva $1/10$ felé tart.

Világos, hogy megfordíthatóan egyértelmű, vagy 0-mértékű halmazok kivételével ilyen T esetében a mértékmegtartás egyszerűen azt jelenti, hogy E és TE mértéke ugyanaz.

Az integrál LEBESGUE-féle értelmezéséből rögtön adódik, hogy mértékmegtartó T átalakításra és f integrálható függvényre, mihelyt $E=T^{-1}(TE)$, akkor

$$\int_E f(TP) = \int_{TE} f(P).$$

Ezekután rátérhetünk a segédtétel bebizonyítására.

Jelöljük $E^{(m)}$-mel azoknak a P pontoknak halmazát, melyekre a segédtételben szereplő összegek közül már az első m között van legalább egy határozottan pozitív. Az $E^{(m)}$ halmazok növekvő m-mel növekedve a segédtétel E halmaza felé tartanak. Az (1) egyenlőtlenség tehát bizonyosan igaz, ha igaz a megfelelő

$$\int_{E^{(m)}} f_1(P) \geqq 0 \qquad (2)$$

egyenlőtlenség. Az utóbbi azonban könnyen adódik az I. segédtételből. Legyen ugyanis $n > m$ és jelentse E_k azoknak a P pontoknak a halmazát, melyekre az $f_1(P), f_2(P),\ldots, f_n(P)$ értékek sorozatában $f_k(P)$ a fenti értelemben az m számra nézve jó kezdőtag. Akkor minden P helyen az $f_k(P)$ értékek összege, ha ebben a fenti n tagú sorozatnak csak azokat a tagjait szerepeltetjük, amelyek m-re nézve jó kezdőtagok, az I. segédtétel szerint pozitív. Ebből integrálással könnyen adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f_k(P) \geqq 0. \tag{3}$$

Másrészt, ha $k \leq n-m$, akkor ugyancsak nyilvánvaló, hogy $TE_k = E_{k-1}$, $E_{k-1} = T^{-1}E_k$, hogy tehát a (3)-ban szereplő integrálok közül az első $n-m$ egyenlő egymással és mivel $E_1 = E^{(m)}$, közös értékük egyenlő a (2)-ben szereplő integrállal. A hátralevő integrálok abszolút értéke nyilvánvalóan legfeljebb az $|f_1(P)|$ függvénynek az egész Ω halmazon vett integrálja. Tehát (3)-ból

$$(n-m) \int_{E^{(m)}} f_1(P) + m \int_{\Omega} |f_1(P)| \geqq 0,$$

amit $n-m$-mel osztva, az $n \to \infty$ határátmenettel adódik a (2) egyenlőtlenség és vele segédtételünk állítása.

2. Birkhoff tétele. A II. segédtétel felhasználásával a Birkhoff-féle tétel bebizonyítása lényegben csak Birkhoff eredeti bizonyítása befejező gondolatmenetének megismétlése. Legyen $E_{\alpha\beta}$, ahol $\alpha > \beta$, azon P pontok halmaza, melyekre

$$\overline{\lim}\, \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} f_k(P) > \alpha$$

és egyszersmind

$$\underline{\lim}\, \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} f_k(P) < \beta.$$

Tegyük föl még egyelőre azt is, hogy Ω véges mértékű; akkor az $E_{\alpha\beta}$ halmaz, mely nyilvánvalóan mérhető, ugyancsak véges mértékű. Az $E_{\alpha\beta}$ halmaz a T átalakításra nézve invariáns, mert az értelmező képletekben P helyett TP-t és ugyanakkor n helyett $(n-1)$-et írva, vagyis, ha csak $f_2(P), f_3(P), \ldots, f_n(P)$ számtani közepét tekintjük, a szélső torlódási értékek nem változnak.

Mivel $E_{\alpha\beta}$ invariáns, átveheti Ω szerepét a II. segédtételben és ha ezt $f_1(P)$ helyett az $f_1(P) - \alpha$ függvényre alkalmazzuk, akkor nyilvánvaló, hogy $E_{\alpha\beta}$-nak jut az E halmaz szerepe is. Ennélfogva (1) szerint

$$\int_{E_{\alpha\beta}} (f_1(P) - \alpha) \geqq 0. \tag{4}$$

Ugyanígy, de $f_1(P)$ helyett $\beta - f_1(P)$-re alkalmazva a segédtételt, kapjuk, hogy

$$\int_{E_{\alpha\beta}} (\beta - f_1(P)) \geqq 0, \tag{5}$$

Végre (4)-et és (5)-öt összeadva

$$\int_{E_{\alpha\beta}} (\beta - \alpha) \geqq 0;$$

ez pedig, minthogy $\beta - \alpha < 0$, csak úgy lehetséges, ha az $E_{\alpha\beta}$ halmaz 0-mértékű.

Tekintsük most a $\Sigma E_{\alpha\beta} = E^*$ egyesítési halmazt, ahol (α, β) befutja az összes az $\alpha > \beta$ feltételnek eleget tevő racionális számpárokat, akkor E^*, mint megszámlálhatóan végtelen sok 0-mértékű halmaz egyesítése, szintén 0-mértékű. Az

$$\frac{1}{n} \sum_1^n f_k(P) \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{6}$$

sorozat tehát majdnem mindenütt, t. i. E^* kivételével mindenütt, véges vagy meghatározott jelű végtelen határérték felé, tehát egy $\varphi(P)$ függvény felé tart. Mivel még

$$\int_\Omega \left| \frac{1}{n} \sum_1^n f_k(P) \right| \leqq \frac{1}{n} \int_\Omega \sum_1^n \left| f_k(P) \right| = \int_\Omega \left| f_1(P) \right|,$$

azért a Fatou-féle lemma szerint a $\varphi(P)$ limeszfüggvény is integrálható; tehát a határérték majdnem mindenütt véges. Egy másik jól ismert tétel alapján, mely szerint az olyan függvényekből álló majdnem mindenütt összetartó sorozatot, melyeknek integrálja egyenletesen teljesen folytonos, szabad tagonkint integrálni, még az is következik (de csak véges mértékű Ω esetére), hogy

$$\int_\Omega \varphi(P) = \int_\Omega f_1(P). \tag{7}$$

Végtelen mértékű Ω alaphalmaz esetében a (6) sorozat összetartásának bizonyítása csak akkor teljes, ha, mielőtt még az $E_{\alpha\beta}$ halmazon integrálnánk, megmutatjuk, hogy ez a halmaz mindenesetre véges mértékű. Erre azért van szükségünk, mert máskülönben az $f_1(P) - \alpha$ függvény nem volna integrálható az $E_{\alpha\beta}$ halmazon. Feltehetjük, hogy $\alpha > 0$; mert ellenkező esetben $\beta < 0$

és így $f_1(P) - \alpha$ helyett a $-f_1(P) + \beta$ függvénnyel okoskodhatnánk.

Tekintsük az $E_{\alpha\beta}$ halmaz bármely véges mértékű E' részhalmazát; karakterisztikus függvénye legyen $e(P)$. A II. segédtételt alkalmazzuk $f_1(P)$ helyett a $g_1(P) = f_1(P) - \alpha e(P)$ függvényre; akkor tehát a $g_1(P)$-nek megfelelő E halmazon

$$\int_E g_1(P) \geqq 0;$$

vagyis, mivel E' része az E-nek,

$$\int_E f_1(P) \geqq \alpha \int_E e(P) = \alpha m E'.$$

Tehát a fortiori

$$\alpha m E' \leqq \int_\Omega |f_1(P)|.$$

Vagyis $E_{\alpha\beta}$ minden véges mértékű részhalmazának mértéke az

$$\frac{1}{\alpha} \int_\Omega |f_1(P)|$$

korlát alatt marad; tehát $E_{\alpha\beta}$ csakugyan véges mértékű.

Ezzel teljesen bebizonyítottuk Birkhoff tételét a következő általánosabb alakban:

Birkhoff tétele. Legyen T a mérhető, véges vagy végtelen mértékű Ω halmaznak egy önmagába vagy részébe való mértékmegtartó átalakítása, $f_1(P)$ egy az Ω halmazon integrálható függvény. Legyen továbbá $f_{k+1}(P) = f_1(T^k P)$. Akkor az

$$\frac{1}{n} \sum_1^n f_k(P)$$

középértékek sorozata az Ω halmazon majdnem mindenütt összetartó. Határértéke, $\varphi(P)$, a T átalakításra nézve invariáns integrálható függvény és ha Ω véges mértékű, akkor

$$\int_\Omega \varphi(P) = \int_\Omega f_1(P).$$

3. Hopf tétele. Még néhány szót a tételnek egy E. Hopf-tól eredő általánosításáról.[11] Véges mértékű Ω halmaz esetére ez az általánosítás könnyen adódik magából a tételből; végtelen mértékű Ω esetére azonban lényegesen többet mond. Hopf eredményét kis változtatással így fogalmazhatjuk meg.

---

[11] Hopf 2, §. 14.

Hopf tétele. Legyen T a mérhető, véges vagy végtelen mértékű Ω halmaznak egy önmagába vagy részébe való mértékmegtartó átalakítása, $f_1(P)$ egy az Ω halmazon, $g_1(P)$ pedig az Ω halmaz minden véges mértékű részén integrálható függvény. Az utóbbi függvény legyen mindenütt pozitív. Legyen

$$f_{k+1}(P) = f_1(T^k P),\ g_{k+1}(P) = g_1(T^k P).$$

Jelentse Ω' az Ω halmaznak azt a T-re nézve nyilvánvalóan invariáns részét, amelyen

$$\sum_1^\infty g_k(P) = \infty.$$

Akkor az Ω' halmazon a

$$\sum_1^n f_k(P) \Big/ \sum_1^n g_k(P) \tag{8}$$

hányadosok sorozata majdnem mindenütt összetartó. Határértéke, $\psi(P)$, a T átalakításra nézve invariáns függvény és ha $g_1(P)$ az Ω halmazon vagy csak az Ω' halmazon is integrálható, akkor

$$\int_{\Omega'} g_1(P)\,\psi(P) = \int_{\Omega'} f_1(P). \tag{9}$$

Bizonyítás, A (8) sorozat összetartásának bizonyítása a II. segédtétel alapján szinte szószerint ugyanaz, mint a BIRKHOFF-tételben szereplő (6) sorozatra; természetesen az α és β állandók szerepét az $\alpha g_1(P)$ és $\beta g_1(P)$ függvények veszik át. A $\psi(P)$ függvény invariáns volta nyilvánvaló. (9)-et így bizonyítjuk be. Tetszésszerinti kis pozitív δ-ra tekintsük az Ω' halmaznak azt az E_n részhalmazát, amelyen

$$(n-1)\delta \leqq \psi(P) < n\delta.$$

Az E_n halmaz nyilvánvalóan invariáns és a II. segédtétel alapján (ugyanúgy okoskodva, mint előzőleg az $E_{\alpha\beta}$ halmaz esetében)

$$(n-1)\delta \int_{E_n} g_1(P) \leqq \int_{E_n} f_1(P) \leqq n\delta \int_{E_n} g_1(P). \tag{10}$$

Másrészt világos, hogy az

$$\int_{E_n} g_1(P)\,\psi(P)$$

érték ugyanezen két korlát közt fekszik. Az n értéket az összes pozitív és negatív egész számokon végigfuttatva és összegezve az adódik, hogy (9) két oldalán álló integrálok értéke

$$\delta \sum_{-\infty}^{\infty} (n-1) \int_{E_n} g_1(P)$$

és

$$\delta \sum_{-\infty}^{\infty} (n-1) \int_{E_n} g_1(P) + \delta \int_{\Omega'} g_1(P)$$

között fekszik, tehát egymástól való eltérésük legfeljebb

$$\delta \int_{\Omega'} g_1(P),$$

vagyis, mivel δ tetszés szerint kicsiny, azért a két integrál értéke pontosan egyenlő.

4. A mechanikának azokban a problémáiban, amelyek Birkhoff tételéhez vezettek, mint amilyen például az n test problémája vagy az inkompresszibilis folyadék stacionárius áramlásának a kérdése, az idő szerepel mint folytonos változó. Ezért nem egy T átalakítás hatványairól, hanem inkább a t paramétertől függő T^t átalakításseregről van szó, mint csoportról vagy félcsoportról, abban az értelemben, hogy T^0 az azonosság és $T^sT^t = T^{s+t}$. A (7) alatti számtani középérték szerepét itt az

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(T^tP)\,dt \tag{11}$$

integrálközépérték veszi át. A (11) alatti középérték összetartásának látszólag nehezebb kérdése, mint ismeretes, az $f(T^tP)$ függvények integrálhatóságára vonatkozó nagyon általános föltevés alapján könnyen visszavezethető a diszkrét esetre, úgy t. i., hogy az $f_k(P)$ függvények szerepét az

$$f_k(P) = \int_{k-1}^{k} f(T^tP)\,dt$$

függvények veszik át, amelyek az $f_1(P)$ függvényből a $T = T^1$ átalakítás iterálásával adódnak. Ezzel már τ egész értékeire nyilvánvaló módon adódik a megfelelő eredmény; a közbeeső τ-értékekkel képezett integrálközépértékeknek a τ szomszédos egész értékeivel számítottaktól való eltérése pedig nagyon könnyen becsülhető meg.[12]

A helyett, hogy ezt a meggondolást részleteznők, talán érdekesebb arra rámutatnunk, hogy az itt használt módszer fölöslegessé teszi a diszkrét esetre való visszavezetést, mert egész eddigi gondolatmenetünk szinte szembeszökő módon vihető át folytonos t változó esetére. Lényeges csupán az I. segédtétel átvitelének a kérdése és azt hiszem, hogy a további részleteket az olvasóra bízhatjuk. Az I. segédtételnek itt a következő tétel felel meg:

Adva van az (a, b) *közön integrálható* $g(t)$ *függvény és a* $d \leq b-a$ *távolság. A* t *változó «jó» kezdőértékeinek tekintsük azokat a* t_0 *értékeket, melyekhez van legalább egy olyan* $h<d$ *távolság, hogy a* $g(t)$ *függvénynek* t_0*-tól* t_0+h*-ig vett integrálja pozitív. Vagy, ami ugyanaz, ha* $G(t)$ *a* $g(t)$ *függvény integrálfüggvénye, tekintsük azokat a* t_0 *értékeket, melyekre és alkalmas* h*-ra* $G(t_0+h) > G(t_0)$*, ahol* $0<h<d$*. Akkor a jó kezdőértékek véges számú vagy végtelen sok közt alkotnak és ezek mindegyikén, tehát a jó kezdőértékek egész halmazán is a* $g(t)$ *integrálja, vagyis a* $G(t)$ *függvény variációja pozitív vagy* 0.

Azért fogalmaztam meg az állítást mindjárt a $G(t)$ függvény beiktatásával is, mert ebben az alakjában már nagyon emlékeztet egy régebbi tételemre,[13] melyet annakidején a monoton függvények majdnem mindenütt való differenciálhatóságának, valamint Hardy és Littlewood egy nevezetes egyenlőtlenségének bebizonyítására használtam föl. Mindenekelőtt megjegyzem, hogy az állítás helyességéhez fölösleges föltennünk, hogy $G(t)$ integrálfüggvény, nagyon elég például csak annyi is, hogy $G(t)$ folytonos. Így megfogalmazva, az említett régebbi tétel és a mostani állítás között csak az az eltérés, hogy most h-t korlátoztuk, míg a régebbi tételben pozitív értékeken szabadon változott. A bizonyítás is szinte szószerint ugyanaz. Az, hogy az (a, b) köz belsejében fekvő jó kezdőértékek halmaza nyitott halmaz és így nyitott (a_k, b_k) közökből áll, hogy tehát b_k már

---

[12] Hopf 1, 2; Khintchine 1.
[13] Riesz 4.

nem jó kezdőérték, az a folytonosságból nyilvánvalóan következik. Azt kell megmutatnunk, hogy $G(a_k) \leq G(b_k)$; ez pedig ugyancsak a folytonosság miatt igaz, ha $G(t_0) \leq G(b_k)$ minden a_k és b_k közé eső, tehát «jó» t_0-ra. Legyen t_1 a t_0-tól legtávolabb fekvő olyan hely, melyen a $G(t)$ függvény a (t_0, b_k+d), vagy, ha $b_k+d>b$, a (t_0, b) közben legnagyobb értékét éri el. Akkor először is nem lehet $t_1<b_k$, mert akkor t_1 jó kezdőérték, tehát $G(t_1)$ nem lehetne a mondott közben a legnagyobb érték. Másodszor, ha $t_1=b_k$, akkor már célnál vagyunk. Végre, ha $t_1>b_k$, akkor, mivel b_k nem jó kezdőérték, tehát $G(b_k) \geq G(t_1)$ és így $G(t_0) \leq G(t_1) \leq G(b_k)$, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

5. Annak a kérdésnek a vizsgálatára, hogy a P pont pályájának megadott halmazban eltöltött átlagideje általában független-e a P pont megválasztásától, vagyis, hogy a megfelelő $\varphi(P)$ limeszfüggvény értéke ugyanaz-e majdnem mindenütt, egyszerű kifejezésmód kedvéért szorítkozzunk Birkhoff tételének arra az esetére, amikor az Ω alaphalmaz véges mértékű és amelyben egyetlen T átalakítás iterálásáról van szó. A meggondolás a többi esetben lényegében ugyanaz.

A T átalakításról akkor mondjuk. hogy *metrikusan tranzitív*, ha az Ω alaphalmaz nem bontható fel két olyan mérhető halmaz összegére, $\Omega=E_1+E_2$, melyeknek egyike sem 0-mértékű (tehát egyike sem teljes, vagyis Ω-val egyező mértékű) és amelyek mindegyike invariáns, azaz átalakítottját legfeljebb egy-egy 0-mértékű halmaz kivételével tartalmazza, vagyis azzal majdnem mindenütt megegyezik.[14]

Tegyük föl először azt, hogy T nem metrikusan tranzitív, tehát, hogy igenis lehetséges az említett felbontás. Válasszuk $f_1(P)$ gyanánt az E_1 halmaz karakterisztikus függvényét, akkor $f_1(P)$ invariáns, azaz $f_1(TP)=f_1(P)$ majdnem mindenütt. Ebből azonnal adódik, hogy a megfelelő $\varphi(P)$ függvény is majdnem mindenütt megegyezik $f_1(P)$-vel, tehát E_1-en majdnem mindenütt 1, E_2-n majdnem mindenütt 0. Tehát a metrikus tranzitivitás *szükséges föltétele* annak, hogy a $\varphi(P)$ limeszfüggvények majd-

[14] Birkhoff—Smith 1.

nem állandók legyenek, még akkor is, ha a kiinduló $f_1(P)$ függvények gyanánt karakterisztikus függvényekre szorítkozunk.

A föltétel *elegendő* is. Tegyük föl, hogy T metrikusan tranzitív és valamilyen $f_1(P)$-ből kiindulva képezzük a megfelelő $\varphi(P)$ függvényt. Legyen a tetszésszenti számérték, akkor a $\varphi(P) \leq a$, $\varphi(P) > a$ előírások Ω egy $E_1 + E_2$ fölbontását értelmezik és mivel T metrikusan tranzitív és halmazaink $\varphi(P)$-vel együtt invariánsok, azért az egyik halmaz 0-mértékű. Ez érvényes a minden értékére. Ámde pozitív a-ra a-szor az E_2 halmaz mértéke nem nagyobb, mint $|\varphi|$ integrálja, tehát elég nagy a-ra E_2 nem lehet teljes mértékű és ennélfogva 0-mértékű. Viszont ugyanilyen oknál fogva negatív és abszolút értékben elég nagy a-ra E_1 0-mértékű és E_2 teljes mértékű. Legyen a^* azoknak az a értékeknek alsó határa, amelyekre E_2 0-mértékű, akkor világos, hogy $\varphi(P) = a^*$ majdnem mindenütt. Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.

Neumann tétele és rokon tételek.

6. Neumann tétele, ha annak megfogalmazásában egyelőre Birkhoff tételének föltevéseihez hasonlókra szorítkozunk, valamennyire általánosítva a következőképpen hangzik.

Ha T egy a mérhető Ω halmazon megadott mértékmegtartó átalakítás és $f_1(P)$ egy a halmazon értelmezett négyzetesen integrálható függvény, akkor az eddigi jelöléssel a

$$\varphi_n = \frac{1}{n} \sum_1^n f_k(P) \qquad (n=1, 2, \ldots) \tag{12}$$

számtani középértékekből alkotott függvénysorozat és általánosabban a

$$\varphi_{m,n} = \frac{1}{n-m} \sum_{m+1}^{n} f_k(P) \tag{13}$$

középértékek minden olyan sorozata, melyre $n-m \to \infty$, négyzetintegrálra erősen összetartó. Másként mondva, van olyan, egy 0-mértékű halmaztól eltekintve egyértelműen meghatározott, négyzetesen integrálható $\varphi(P)$ függvény, melyre

$$\int_\Omega (\varphi(P) - \varphi_n(P))^2 \to 0, \quad \int_\Omega (\varphi(P) - \varphi_{m,n}(P))^2 \to 0.$$

Ebben a formában NEUMANN tétele, legalább első tekintetre, lényegesen kevesebbet mond, mint BIRKHOFF-é, mert az effektív összetartás helyett csak az erős, tehát csak átlagban való összetartást állapítja meg. Azonban, még ha nem is tekintjük azt, hogy egyes alkalmazásokhoz, például a statisztikus mechanikában, elegendő már NEUMANN tétele is, ez a tétel tisztán matematikai szempontból is jelentős maradt BIRKHOFF felfedezése után is. Először is, NEUMANN állítása általánosabb annyiban, hogy nemcsak a (12), hanem a (13) sorozatokra is érvényes. Másodszor, már az első bizonyítás, NEUMANN-é, sem aknázza ki alaposabban a T átalakítás mértékmegtartó jellegét, hanem ennek csak azt a nyilvánvaló következményét használja föl, amelyre KOOPMAN és CARLEMAN figyelmeztettek, hogy az $f(P)$-ről $f(TP)$-re való átmenetnél a négyzetintegrál változatlan marad. Evvel már ki is merül az Ω halmaz és a T átalakítás szerepe és többé az sem lényeges, hogy függvényekről van szó; f most már egy végtelen vagy esetleg véges dimenziójú euklidesi vektortérnek, a legfontosabb esetekben a valós vagy képzetes HILBERT-térnek eleme és az $f(P)$-ről $f(TP)$-re való átmenet szerepét ennek a térnek egy hosszmegtartó átalakítása játssza. Nem volt nehéz észrevenni azt sem, hogy a hosszmegtartás helyett elég már az is, ha a hossz nem nagyobbodik. Ez az észrevétel a tétel lényegének jobb felismeréséhez és evvel az addigiaknál sokkal egyszerűbb bizonyításhoz vezetett, ezenkívül a tételnek ahhoz, az eredeti módszerrel hozzáférhetetlen általánosításához, melyben a 2 kitevő szerepét tetszésszerinti $p>1$ kitevő veszi át, valamint a kényesebb $p=1$ eset elintézéséhez. Ezeket az eredményeket 1938-ban ismertettem egy rövid dolgozatban[15] és ugyanakkor tőlem függetlenül lényegében ugyanarra a módszerre és ugyanazokra az eredményekre jutottak, elvontabban megfogalmazva, YOSIDA és KAKUTANI japán matematikusok is.[16] Ezzel indult meg az idevágó legújabb vizsgálatoknak tekintélyes sora, mely különböző messzemenő általánosításokhoz vezetett.

7. Egyelőre, hogy ne távolodjunk el túlságosan az eddigi gondolatkörtől, maradjunk az L^2 függvénytérben, az Ω halmazon

[15] RIESZ 1.

[16] YOSIDA 1; KAKUTANI 1.

négyzetesen integrálható $f(P)$ függvényeknél, vagyis azoknál, amelyekre maga f minden a $d\Omega$ tömegeloszlásra nézve véges mértékű részhalmazon, $|f|^2$ pedig az egész Ω halmazon integrálható. Mellékes, hogy a valós értékü függvényekre szorítkozunk-e, vagy sem. Egyszerűbb kifejezésmód kedvéért $|f|^2$-nek az Ω halmazon való integráljának pozitív négyzetgyökét $\|f\|$-fel jelöljük és az f normájának nevezzük. A szokásos megállapodás szerint, ha $\|f-g\|=0$, azaz $f=g$ legfeljebb egy 0-mértékű halmaz kivételével, akkor az f és g függvényeket azonosnak tekintjük. Az L^2 térnek egyik jellegzetes összefüggése, amelyre szükségünk lesz, a következő:

$$\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\|f\|^2+2\|g\|^2. \tag{14}$$

Ez az összefüggés rövid számítással nyilvánvaló módon adódik; de talán nem érdektelen, ha elemi geometriai jelentését is megadjuk. Az f és g lineáris kapcsolatainak összessége lényegében közönséges vektorsík és a (14) összefüggés egyszerűen azt jelenti, hogy az f és g által meghatározott vektorparallelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével.

Egy másik ismeretes összefüggés az ú. n. háromszögegyenlőtlenség:

$$\|f+g\|\leqq\|f\|+\|g\|.$$

Az L^2 függvénytér S lineáris átalakításán olyan előírást értünk, mely minden f elemhez egy Sf elemet rendel és amelyre $S(cf)=cSf$ (c tetszésszerinti komplex szám), $S(f+g)=Sf+Sg$. S összehúzás, ha minden f-re $\|Sf\|\leqq\|f\|$.

Bizonyítsuk be most már NEUMANN tételét a következő általánosabb alakban:

Ha S összehúzás és f_1 egy tetszés szerint megadott elem, akkor a

$$\varphi_n=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} f_k \quad (f_k=S^{k-1}f_1;\ n=1,2,\ldots) \tag{15}$$

sorozat erősen összetartó, azaz van olyan φ elem, melyre

$$\|\varphi-\varphi_n\|\rightarrow 0.$$

Ugyancsak φ felé tart erősen az általánosabb

$$\varphi_{m,n}=\frac{1}{n-m}\sum_{m+1}^{n} f_k \quad (n-m\rightarrow\infty) \tag{16}$$

sorozat.

A φ elem az S átalakításra invariáns, $S\varphi=\varphi$.

Bizonyítás.[17] Tekintsük azt a G konvex függvényhalmazt, melynek elemei az f_k függvények összes általánosabb értelemben vett számtani közepei, t. i. összes olyan

$$g=\sum_1^{\nu} c_k f_k \tag{17}$$

alakú kapcsolatai, melyekre $c_k \geqq 0$ és $\sum_1^{\nu} c_k = 1$. Legyen μ az összes ilyen g függvények $\|g\|$ normáinak alsó határa.

A φ_n és $\varphi_{m,n}$ közepek nyilvánvalóan beletartoznak a G halmazba. Megmutatjuk, hogy $\|\varphi_n\| \to \mu$, ha $n \to \infty$ és $\|\varphi_{m,n}\| \to \mu$, ha $n-m \to \infty$, amit úgy is mondunk, hogy $\{\varphi_n\}$ és $\{\varphi_{m,n}\}$ minimizáló sorozatok. Elég ezt az elsőre megmutatni, mert ebből már a

$$\|\varphi_{m,n}\| = \|S^m \varphi_{n-m}\| \leqq \|\varphi_{n-m}\|$$

megbecslés alapján az általánosabb sorozatra is adódik. Tehát azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen $\varepsilon > 0$ megadása után elég nagy n-re

$$\|\varphi_n\| < \mu + \varepsilon.$$

Ehhez tekintsünk a G halmaz elemei közül olyan g-t, melyre

$$\|g\| < \mu + \frac{\varepsilon}{2} \tag{18}$$

és képezzük a $g_i = S^{i-1} g$ $(i=1, 2, \ldots n)$ elemek ψ_n számtani közepét. Tegyük a g_i tagok helyébe az f_k elemekkel való, az S átalakításnak a (17)-re való ismételt alkalmazásával adódó kifejezésüket, és az így kapott kifejezést hasonlítsuk össze a φ_n közepéével. Mivel $c_1+c_2+\cdots+c_\nu=1$, azért nyilvánvaló, hogy a két kifejezés, mihelyt $n>\nu$, ν-edik tagjától az n-edikig pontosan megegyezik, míg a különbségükben még fellépő összesen $2(\nu-1)$ tag együtthatói abszolút értékre nem nagyobbak, mint $1/n$. Tehát

$$\|\varphi_n - \psi_n\| \leqq 2(\nu-1)\frac{1}{n}\|f_1\| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{19}$$

hacsak n már elég nagy.

---

[17] Riesz 3.

Viszont, mivel S összehúzás, azért (18)-ból

$$\|g_i\| < \mu + \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát egyszersmind

$$\|\psi_n\| < \mu + \frac{\varepsilon}{2}$$

és így végül

$$\|\varphi_n\| \leqq \|\varphi_n - \psi_n\| + \|\psi_n\| < \mu + \varepsilon,$$

mint ahogy állítottuk. Tehát $\{\varphi_n\}$ és $\{\varphi_{m,n}\}$ minimizáló sorozatok. Már pedig minden a G konvex halmazból kiragadott $g_1, g_2, \ldots$ minimizáló sorozat, $\|g_n\| \to \mu$, erősen összetartó. Ugyanis alkalmazzuk a (14) összefüggést g_m-re és g_n-re és jegyezzük meg, hogy $(g_m+g_n)/2$ is a G halmazba tartozik, hogy tehát

$$\|g_m+g_n\| = 2\|(g_m+g_n)/2\| \geqq 2\mu.$$

E szerint

$$\|g_m-g_n\|^2 \leqq 2\|g_m\|^2 + 2\|g_n\|^2 - 4\mu^2 \tag{20}$$

és mivel még $\|g_m\| \to \mu$, $\|g_n\| \to \mu$, azért a jobboldal, tehát a bal is 0 felé tart, vagyis

$$\|g_m - g_n\| \to 0.$$

De tudjuk, hogy ez a föltétel biztosítja olyan φ létezését, mely felé g_n erősen tart; ezzel állításunkat be is bizonyítottuk.

Mivel még bármely két minimizáló sorozat, $\{g_n\}$ és $\{g_n^\star\}$ egymásba iktatásával nyert $g_1, g_1^\star, g_2, g_2^\star, \ldots$ sorozat is nyilvánvalóan minimizáló és ennélfogva erősen összetartó, azért minden minimizáló $\{g_n\}$ sorozat ugyanazt a φ erős limeszt szolgáltatja. Ebből könnyen adódik φ invariáns volta is. Ugyanis, mivel $\|S\varphi_n\| \leqq \|\varphi_n\|$, az $\{S\varphi_n\}$ sorozat is minimizáló, tehát

$$\|S\varphi_n - \varphi\| \to 0$$

és így

$$\|S\varphi-\varphi\| \leqq \|S(\varphi-\varphi_n)\| + \|S\varphi_n - \varphi\| \leqq \|\varphi-\varphi_n\| + \|S\varphi_n - \varphi\| \to 0,$$

vagyis $S\varphi = \varphi$.

A tételnek az a változata, melyben az S hatványainak szerepét egy folytonos t paramétertől függő S^t csoport veszi át, nagyon könnyen vezethető vissza az imént tárgyalt esetre, de közvetlenül is adódik eddigi módszerünkkel, csupán egyes összegek szerepét kell integráloknak átadnunk.

8. Most először is néhány szót a tételnek két elég könnyen adódó általánosításáról.

Az elsőhöz a következő meggondolással jutunk el. Ha bizonyításunkon végig megyünk, azt látjuk, hogy az L^2 függvénytérről mindenekelőtt azt használtuk föl, hogy lineáris tér, azaz elemeire értelmezve van az $f+g$ összeg és a számértékkel való cf szorzat, hogy az összeadás kommutatív és asszociatív, szorzatok összeadása disztributív mind c-re, mind f-re nézve, hogy továbbá minden f-hez tartozik egy norma, $\|f\| \geqq 0$, melyre $\|cf\| = |c|\|f\|$ és amelyre áll az $\|f+g\| \leqq \|f\| + \|g\|$ háromszögegyenlőtlenség. Az S átalakításról azt tudtuk, hogy lineáris: $S(cf) = cSf$ és $S(f+g) = Sf+Sg$ és hogy összehúzás: $\|Sf\| \leqq \|f\|$. Ennyi kellett ahhoz, hogy megmutassuk, hogy $\{\varphi_n\}$ és $\{\varphi_{m,n}\}$ minimizáló sorozatok. Ezután már csak az maradt hátra, hogy minden $\{g_n\}$ minimizáló sorozat összetartó, abban az értelemben, hogy van a térnek olyan φ eleme, melyre $\|\varphi - g_n\| \to 0$. Ha tudjuk, hogy terünk nemcsak lineáris, de teljes is (vagy más néven BANACH-tér), azaz, hogy a $\|g_n - g_m\| \to 0$ föltétel biztosítja a mondott φ létezését, akkor csak ezt a föltételt kell még igazolnunk, Az L^2 tér esetében biztosította ezt a (14) összefüggés, illetőleg a $\|g_m - g_n\|$ normának az utóbbiból adódó (20) megbecslése. Nyilvánvaló, hogy minderre csak ahhoz volt szükségünk, hogy a $\|g_m\| \to \mu$, $\|g_n\| \to \mu$, $\|(g_m+g_n)/2\| \geqq \mu$ összefüggésekből adódjék, hogy $\|g_n - g_m\| \to 0$. Homogenitás folytán μ-t 1-nek vehetjük, a lényeges tehát csak terünknek az a sajátsága, hogy a $\|g\| \leqq 1 + \varepsilon$, $\|h\| \leqq 1 + \varepsilon$, $\|(g+h)\| \geqq 2$ föltevésekből $\|g-h\| \leqq \delta(\varepsilon)$ következzék, ahol $\delta(\varepsilon)$ egy terünk szerkezetéből adódó függvény és $\varepsilon \to 0$-ra $\delta(\varepsilon) \to 0$ (L^2 esetében $\delta(\varepsilon) = 4\varepsilon(2+\varepsilon)$). Minden olyan BANACH-teret, melynek meg van ez a sajátsága, egyenletesen konvexnek mondanak.[18] Tehát meggondolásunk és ezzel tételünk is *érvényes minden egyenletesen konvex* BANACH-*térre.*

Ilyen tér például minden $p > 1$-re az L^p függvénytér, vagyis azoknak az $f(P)$ függvényeknek az összessége, melyek maguk minden véges mértékű részhalmazon, $|f|^p$ pedig az egész Ω halmazon integrálhatók. Ellenben nem ilyen az L^1 függvénytér.

---

[18] CLARKSON 1.

9. A másik közeli általánosítást[19] egyszerűség kedvéért két egymással fölcserélhető, a normát nem nagyobbító S és U átalakítás esetére fogalmazzuk meg; hasonlóan szól több ilyen átalakítás esetében, azonkívül kombinálható az előbbi általánosítással is.

Az L^2 tér $f_{1,1}$ eleméből elindulva, képezzük az $f_{i,k}$ elemeket, ahol $f_{i,k}=S^{i-1}U^{k-1}f_{1,1}$, tehát

$$f_{i+1,k}=Sf_{i,k};\ f_{i,k+1}=Uf_{i,k}.$$

Tekintsük a

$$\varphi_{m,n,m',n'}=\frac{1}{(n-m)(n'-m')}\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{k=m'+1}^{n'}f_{i,k}$$

középeket. Ezek a középek, ha $n-m\to\infty$ és $n'-m'\to\infty$, erősen tartanak egy mind S-re, mind U-ra invariáns φ elemhez.

A bizonyítás lényegében ugyanaz, mint az imént egyetlen S esetére; átfogalmazását az olvasóra bízzuk.

Jegyezzük még meg, hogy az $n-m\to\infty$, $n'-m'\to\infty$ határátmenetet úgy is jellemezhetjük, hogy az összegezést a pozitív egész koordinátájú (i, k) pontokból képezett rácsnak a tengelyekkel párhuzamos oldalú parallelogrammáiban foglalt rácspontjaira nézve végezzük és a parallelogrammák oldalait végtelenbe növeljük. Ez a fogalmazás további kiterjesztést sugalmaz, melyben a parallelogrammák szerepét más idomok veszik át. Hogy csak egy nagyon egyszerű esetet említsek, a tétel érvényes marad konvex idomok minden olyan sorozatára, amelyre az idomok területe végtelenbe nő, a kerület és a terület hányadosa pedig 0 felé tart. A bizonyítás lényegében még mindig ugyanaz, mint az imént; csak a (19) megbecslést pótolja itt az, hogy a kerületekhez megadott távolságnál közelebb eső rácspontok száma az idomok belsejébe esőkéhez viszonyítva 0 felé tart.

Térjünk rá most olyan problémára, melynek elintézésére eddigi módszerünk nem alkalmas. Már a Neumann-tétel egy nagyon csekély és nem túlságosan fontos tágításánál is csődöt mond a módszer, t. i., ha az S átalakítás összehúzó volta, tehát az

[19] Dunford 1; Wiener 2.

$\|Sf\| \leqq \|f\|$ és vele az $\|S^n f\| \leqq \|f\|$ összefüggés helyett csak az $\|S^n f\| \leqq C\|f\|$ egyenlőtlenséget tesszük föl, ahol C egy f-től és n-től független állandó. Már ebben az esetben is átmenetileg az ú. n. gyenge összetartás fogalmával és az evvel kapcsolatos kiválasztási tétellel kell dolgoznunk. Sokkal fontosabb és már jobban is eltérő probléma az, amelyben a négyzetes integrálhatóság helyett, ugyanúgy, mint a Birkhoff-tételnél, egyszerűen magából az integrálhatóságból indulunk el, vagyis az L^2 függvénytér szerepét ismét az L^1 (vagy egyszerűen L) függvénytérnek adjuk át. Ez a tér már nem egyenletesen konvex, sorozatok minimizáló voltából itt már nem következik azoknak a megfelelő, t. i. az

$$\int_\Omega |g - g_n| \to 0$$

értelemben való erős összetartása.

Mielőtt az L függvénytér esetét részletesen tárgyalnók, célszerű az alkalmazandó módszert a Neumann-tétel egy másik bizonyításán bemutatnunk.

Mindenekelőtt egyszerűség kedvéért vezessük be az L^2 térre a szokásos

$$(g, h) = \int_\Omega g(P)\bar{h}(P)$$

jelölést, amellyel tehát $\|g\| = (g, g)^{1/2}$. Egy $\{g_n\}$ sorozatra akkor mondjuk, hogy gyengén összetartó, illetőleg hogy gyengén tart egy g^* függvényhez, ha

$$(g_n, h) \to (g^*, h) \tag{21}$$

minden az L^2-be tartozó h-ra. Fel szokták még azt is tenni, hogy a $\|g_n\|$ normák sorozata korlátos; ez azonban már a (21) föltevésből is következik. Ismeretes az is, hogy minden normára nézve korlátos $\{g_n\}$ sorozatból kiválasztható gyengén összetartó részsorozat.

Bizonyításunkban a gyenge összetartásról az erősre való átmenetet biztosítja majd a következő segédtétel.

III. *Ha a $\{g_n\}$ sorozat gyengén tart g^* felé, akkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan*

$$g = \sum_r^s c_i g_i \quad (c_i \geqq 0;\ \sum_r^s c_i = 1) \tag{22}$$

konvex kapcsolat, melyre $\|g^\star - g\| \leqq \varepsilon$. *A kezdő r mutatót tetszés szerint választhatjuk.*

Bizonyítás. Először is világos, hogy a $\{g_n - g^\star\}$ sorozat gyengén tart 0 felé, ezért az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $g^\star = 0$. Azt is föltehetjük, hogy $\|g_i\| \leqq 1$. A keresett g kapcsolatot mint a $\{g_n\}$ sorozatból alkalmasan kiválasztott elemek számtani közepét képezzük.[20] Az első ilyen elem $g^{(1)} = g_r$. A további $g^{(k)}$ elemeket folytatólagosan választjuk ki olyan módon, hogy minden i-re és k-ra $(i \neq k)$

$$|(g^{(i)}, g^{(k)})| < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

legyen. Mivel ugyanis

$$(g_n, g^{(1)}) \to 0,$$

azért találhatunk olyan $n > r$-et, melyre $|(g_n, g^{(1)})| < \frac{\varepsilon^2}{2}$, tehát egyszersmind $|(g^{(1)}, g_n)| = |(g_n, g^{(1)})| < \frac{\varepsilon^2}{2}$; legyen $g^{(2)}$ ez a g_n. Tegyük fel, hogy már sikerült kiválasztanunk az előírt módon a $g^{(1)}, g^{(2)}, \ldots, g^{(k)}$ elemeket; akkor, mivel $i = 1, 2, \ldots, k$-ra

$$(g_n, g^{(i)}) \to 0,$$

találhatunk olyan $n > r$-et, hogy

$$|(g_n, g^{(i)})| < \frac{\varepsilon^2}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Legyen $g^{(k+1)}$ ez a g_n. Az így folytatólagosan meghatározott $g^{(i)}$ elemekre

$$\left\| \frac{g^{(1)} + \cdots + g^{(m)}}{m} \right\|^2 \leqq \frac{m + m(m-1)\frac{\varepsilon^2}{2}}{m^2} < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon^2}{2};$$

tehát elég nagy m-re

$$\left\| \frac{g^{(1)} + \cdots + g^{(m)}}{m} \right\| < \varepsilon.$$

Ezzel segédtételünket bebizonyítottuk.

Neumann tételének bizonyítása most már így alakul. Tekintsük a (12)-ben értelmezett $\{\varphi_n\}$ sorozatot. Mivel ez normára nézve korlátos, kiválasztható belőle egy részsorozat, mely gyengén tart

[20] Banach—Saks 1.

egy φ függvény felé. A III. segédtétel alapján található tehát olyan

$$g = \sum_r^s c_i \varphi_i \qquad (c_i \geqq 0\,;\ \sum_r^s c_i = 1) \tag{23}$$

alakú elemekből álló sorozat, mely erősen tart φ felé és amelyben a kezdő r mutató végtelenbe nő. Ebből először is az következik, hogy φ invariáns, $S\varphi = \varphi$. Ugyanis (12)-ből és (23)-ból, ha $r \to \infty$,

$$\|Sg - g\| = \left\| \sum_r^s c_i \frac{f_{i+1} - f_1}{i} \right\| \leqq \frac{2}{r} \|f_1\| \to 0\,;$$

tehát

$$\|S\varphi - \varphi\| \leqq \|S\varphi - Sg\| + \|Sg - g\| +$$
$$+ \|g - \varphi\| \leqq 2\|\varphi - g\| + \|Sg - g\| \to 0,$$

vagyis $S\varphi = \varphi$.

Írjuk most φ-t a $\varphi = g + h$ alakban, ahol g a (23)-ban szereplő közelítő kifejezés; föltehetjük, hogy

$$\|h\| = \|\varphi - g\| < \varepsilon,$$

ahol ε tetszés szerint kicsiny pozitív szám. Akkor, mivel

$$g = \sum_r^s c_i \varphi_i = \sum_1^s c_i' f_i,$$

ahol nyilvánvalóan ugyancsak $\sum_1^s c_i' = 1$, azért

$$\varphi - f_1 = \sum_1^s c_i'(f_i - f_1) + h = \sum_2^s c_i''(f_i - f_{i-1}) + h. \tag{24}$$

Alkalmazzuk az $S^m, S^{m+1}, \ldots, S^{n-1}$ átalakításokat és képezzük a számtani közepet; akkor

$$\varphi - \varphi_{m,n} = \frac{1}{n-m} \sum_2^s c_i''(f_{i+n-1} - f_{i+m-1}) + \frac{1}{n-m} \sum_m^{n-1} S^i h$$

és így

$$\|\varphi - \varphi_{m,n}\| \leqq \frac{1}{n-m} K \|f_1\| + \|h\| < \frac{1}{n-m} K \|f_1\| + \varepsilon$$

$$(K = 2 \sum_2^s |c_i''|)\,;$$

tehát, ha $n - m$ elég nagy, akkor

$$\|\varphi - \varphi_{m,n}\| < 2\varepsilon, \text{ qu. e. d.}$$

11. Ha az imént részletezett gondolatmenetet az L függvénytérre akarjuk átvinni, melyben a normát az

$$|f| = \int_{\Omega} |f(P)|$$

integrállal értelmezzük és az S lineáris átalakításról azt tesszük föl, hogy ezt a normát nem nagyobbítja, akkor még mindig szükségünk van olyan további lényeges megszorításra, mellyel az imént használthoz hasonló kiválasztást biztosítjuk. Ilyen az a föltevés, hogy az $f_1, f_2, \dots$ $(f_k = S^{k-1} f_1)$ függvények, vagy legalább is a belőlük képezett φ_n közepek abszolút értékre egy közös integrálható majoráns alatt maradnak. A kiválasztást már gyengébb föltevés is biztosítaná, de a mondott föltevés alapján a bizonyítás az imént előadottnak különösen könnyű változata.

Tétel.[21] *Jelentse S az L függvénytérnek olyan lineáris átalakítását, hogy minden f-re $|Sf| \leqq |f|$. Az f_1 függvényből elindulva képezzük az $f_k = S^{k-1} f_1$ függvényeket és tegyük föl, hogy ezek, vagy legalább is φ_n számtani közepeik abszolút értékre egy integrálható $\alpha(P)$ függvény alatt feküsznek. Akkor a φ_n számtani közepek sorozata normára nézve, azaz a*

$$|\varphi - \varphi_n| \to 0$$

értelemben egy az S-re nézve invariáns φ függvény felé tart. Ugyancsak φ felé tart normára nézve az általánosabb

$$\varphi_{m,n} = \frac{1}{n-m} \sum_{m+1}^{n} f_k \qquad (n-m \to \infty)$$

sorozat.

Bizonyítás. Tekintsük először a $\{g_n\}$ sorozatot, ahol

$$g_n(P) = \frac{\varphi_n(P)}{[\alpha(P)]^{1/2}} \text{ vagy } = 0$$

a szerint, hogy $\alpha(P) >$ vagy $= 0$. Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $|\alpha| = 1$. Akkor, minthogy $|\varphi_n(P)| \leqq \alpha(P)$, azért $|g_n(P)|^2 \leqq \alpha(P)$, tehát $\|g_n\|^2 \leqq 1$. Ennélfogva a $\{g_n\}$ sorozatból (mint az L^2 függvénytér sorozatából) kiválasztható olyan részsorozat, mely gyengén tart egy g^* függvény felé, és így a

[21] Riesz 1; Yosida 1.

III. segédtétel szerint $g^\star$ tetszésszerinti ε pontossággal közelíthető meg alkalmasan képezett

$$g = \sum_r^s c_n g_n \qquad (c_n \geqq 0\,;\ \sum_r^s c_n = 1)$$

kapcsolattal: $\|g^\star - g\| < \varepsilon$, ahol még a kezdő r mutató tetszésszerint nagynak választható. Legyen még $\varphi(P) = [\alpha(P)]^{1/2} g^\star(P)$. Akkor

$$\varphi - \sum_r^s c_i \varphi_i = \alpha^{1/2}(g^\star - g).$$

Innen, a Schwarz-féle egyenlőtlenséget alkalmazva,

$$\Big|\varphi - \sum_r^s c_i \varphi_i\Big| \leqq \|g^\star - g\| < \varepsilon.$$

Ebből most már tételünk ugyanazzal a meggondolással adódik, mint az imént Neumann tétele; csupán az L^2-beli $\|f\|$ norma szerepét kell az L-beli normának átadnunk. Röviden elmondva, először is az

$$|S\psi - \psi| = \left|\sum_r^s c_i \frac{f_{i+1} - f_1}{i}\right| \leqq \frac{2}{r}|f_1| \qquad (\psi = \sum_r^s c_i \varphi_i)$$

megbecslésből az $r \to \infty$ határátmenettel adódik φ invariáns volta. Azután a $h = \varphi - \psi$, $|h| < \varepsilon$ függvény bevezetésével $\varphi - f_1$ ismét a

$$\sum_2^s c_i''(f_i - f_{i-1}) + h$$

alakban írható, és ebből az $S^m, S^{m+1}, \dots, S^{n-1}$ átalakítások alkalmazásával ismét

$$\varphi - \varphi_{m,n} = \frac{1}{n-m} \sum_2^s c_i''(f_{i+n-1} - f_{i+m}) + \frac{1}{n-m} \sum_m^{n-1} S_i h$$

adódik; innen

$$|\varphi - \varphi_{m,n}| < \frac{1}{n-m} K |f_1| + \varepsilon \qquad (K = 2\sum_2^s |c_i''|),$$

tehát elég nagy $n - m$-re

$$|\varphi - \varphi_{m,n}| < 2\varepsilon,$$

amivel tételünket bebizonyítottuk.

Irodalom.

ALAOGLU, L.—BIRKHOFF, G. 1. General ergodic theorems, *Annals of Math.*, **41** (1940), 293—309.

BANACH, S.—SAKS, S. 1. Sur la convergence forte dans les champs L^p, *Studia Math.*, **2** (1930), 51—57.

BIRKHOFF, G. 1, Dependent probabilities and spaces *(L)*, *Proceedings National Academy U. S. A.*, **24** (1938), 154—158; **2.** The mean ergodic theorem, *Duke Math. Journal*, **5** (1939), 19—20.

BIRKHOFF, G. D. 1. Proof of the ergodic theorem, *Proceedings National Academy U. S. A.*, **17** (1931), 656—660; **2.** Probability and physical systems, *Bulletin American Math. Society*, **38** (1932), 361—379.

BIRKHOFF, G. D.—KOOPMAN, B. O. 1. Recent contributions to the ergodic theory, *Proceedings National Academy U. S. A.*, **18** (1932), 279—282.

BIRKHOFF, G. D.—SMITH, P. A. 1. Structure analysis of surface transformations, *Journal math. pures et appliquées*, **7** (1928), 345—379.

CARATHÉODORY, C. 1. Bemerkungen zum Riesz—Fischerschen Satz und zur Ergodentheorie, *Abhandlungen Math. Seminar Hamburg*, **14** (1941), 351—389.

CARLEMAN, T. 1. Application de la théorie des équations intégrales singulières aux équations différentielles de la dynamique, *Arkiv för math.* **22** B (1930—32), No. 7, 1—5; **2.** Application de la théorie des équations intégrales linéaires aux systèmes d'équations différentielles non linéaires, *Acta math.*, **59** (1932), 63—87.

CLARKSON, J. A. 1. Uniformly convex spaces, *Transactions American Math. Society*, **40** (1936), 396—414.

DUNFORD, N. 1. A mean ergodic theorem, *Duke Math. Journal*, **5** (1939), 635—646.

HOPF, E. 1. On the time average theorem in dynamics, *Proceedings National Academy U. S. A.*, 18 (1932), 93—100; **2.** Ergodentheorie, *Ergebnisse der Math.*, **5**, H. **2** (Berlin, 1937).

KAKUTANI, SH. 1. Iteration of linear operations in complex Banach spaces, *Proceedings Imperial Academy Tokyo*, **14** (1938), 295—300; **2.** Mean ergodic theorem in abstract *(L)*-spaces, *Proceedings Imperial Academy Tokyo*, 15 (1939), 121—123; **3.** Concrete representation of abstract *(L)*-spaces and the mean ergodic theorem, *Annals of Math.*, **42** (1941), 523—537.

KHINTCHINE, A. 1. Zu Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems, *Math. Annalen*, **107** (1932), 485—488.

KOLMOGOROFF, A. 1. Ein vereinfachter Beweis des Birkhoff—Khintchineschen Ergodensatzes, *Recueil Math.*, **2** (**44**) (1937), 367—368.

KOOPMAN, B. O. 1. Hamiltonian systems and linear transformations in Hilbert space, *Proceedings National Academy U. S. A.*, 17 (1931), 315—318

LORCH, E. R. 1. Means of iterated transformations in reflexive vector spaces, *Bulletin American Math. Society,* **45** (1939), 945—947.

NEUMANN, J. von 1. Proof of the quasiergodic hypothesis, *Proceedings National Academy U. S. A.,* **18** (1932), 70—82; Zur Operatorenmethode der klassischen Mechanik, *Annals of Math.,* **33** (1932), 587—648, 789—791.

POINCARÉ, H. 1. Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, 3 (Paris, 1899).

RIESZ, F. 1 Some mean ergodic theorems, *Journal London Math. Society,* **13** (1938), 274—278; 2. Sur la théorie ergodique des espaces abstraits, *Acta Scientiarum Math. Szeged,* **10** (1941), 1—20, 141; 3. Another proof of the mean ergodic theorem, *Acta Scientiarum Math. Szeged,* **10** (1941), 75—76; 4. A monoton függvények differenciálhatóságáról, *Mat. Fiz. Lapok.* **38** (1931), 125—131.

WIENER, N. 1. The homogeneous chaos, *American Journal of Math.,* **60** (1938), 897—936; 2. The ergodic theorem, *Duke Math. Journal,* **5** (1939), 1—18.

YOSIDA, K. 1. Mean ergodic theorem in Banach spaces, *Proceedings Imperial Academy Tokyo,* **14** (1938), 292—294; 2. Ergodic theorems of Birkhoff—Khintchine's type, *Japanese Journal of Math.,* **17** (1940), 31—36; 3. An abstract treatment of the individual ergodic theorem, *Proceedings Imperial Academy Tokyo,* **16** (1940), 280—282.

YOSIDA, K.—KAKUTANI, SH. 1. Birkhoff's ergodic theorem and the maximal ergodic theorem, *Proceedings Imperial Academy Tokyo,* **15** (1939), 165—168; 2. Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorem, *Annals of Math.,* **42** (1941), 188—228.

Riesz Frigyes.

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE LA THÉORIE ERGODIQUE.

Le théorème ergodique de Birkhoff est démontré sous la forme suivante.

Soit donné un ensemble mesurable Ω, de mesure finie ou infinie, la mesure et l'intégrale correspondante étant définies d'après LEBESGUE *ou plus généralement, par rapport à une distribution de masses positives.*

Cela étant, désignons par T une transformation ponctuelle univoque (mais non nécessairement biunivoque) de Ω en soi-même et supposons que T conserve la mesure au sens que, E étant un ensemble mesurable, TE son transformé et E' l'ensemble des points P dont les images appartiennent à TE, les ensembles E' et TE

admettent la même mesure. Alors, en partant d'une fonction intégrable $f_1(P)$ *et en posant* $f_k(P)=f_1(T^{k-1}P)$, *la moyenne arithmétique des fonctions* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *converge presque partout, pour* $n \to \infty$, *vers une fonction intégrable* $\varphi(P)$, *invariante (presque partout) par rapport à* T.

M. G. D. Birkhoff base la démonstration de son théorème, en substance, sur le lemme suivant, qu'il applique sous une forme un peu différente. Soit, pour une fonction donnée $f_1(P)$, E l'ensemble des points P pour lesquels la limite supérieure des moyennes arithmétiques figurant dans le théorème est positive. Alors

$$\int_E f_1(P) \geqq 0.$$

Il y a quelque temps, MM. Yosida et Kakutani ont réussi à remplacer, dans ce lemme, la limite supérieure par la borne supérieure ; d'une façon précise, l'ensemble E devra être caractérisé par le fait que, dans ses points, l'une au moins des sommes $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ admet une valeur positive. C'est cette proposition (ou plutôt une qui en est équivalente) qu'ils appellent «maximal ergodic theorem».

Ce qui est nouveau dans la présente démonstration, c'est que le lemme en question se déduit, par un artifice simple, du lemme tout élémentaire que voici. *Étant données n quantités réelles* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *et un entier* $m<n$, *considérons toutes les sommes* $a_k+a_{k+1}+\cdots+a_l$ *de valeur positive, formées d'éléments successifs dont le nombre des termes ne dépasse pas l'entier m. Alors les* a_k *figurant comme premiers termes dans l'une au moins de ces expressions, ont leur somme positive.*

On sait que la variante «intégrale» du théorème de Birkhoff, celle où l'on introduit un paramètre continu t, se déduit aisément du théorème énoncé ci-dessus, et cela par un artifice du à MM. F. Hopf et Khintchine. Cependant il convient d'observer qu'on en peut aussi donner une démonstration directe, très voisine de celle que nous venons d'esquisser. Pour cela on n'aura qu'à remplacer notre dernier lemme par sa forme «intégrale» : *Étant donnée, sur l'intervalle* (a, b), *une fonction intégrable* $g(t)$, *de plus une longueur* $d \leqq b-a$, *envisageons l'ensemble e des valeurs* t_0 *telles que l'intégrale de* $g(t)$ *prise de* t_0 *jusqu'à* t_0+h, *soit positive pour une au moins des valeurs* $h<d$. *Alors l'intégrale de* $g(t)$ *sur l'ensemble e est aussi positive ou* 0.

Observons encore que ce dernier lemme est en relation intime avec celui dont l'auteur s'est servi, il y a une dizaine d'années, pour en déduire l'existence, presque partout, de la dérivée des fonctions monotones.

Les mêmes lemmes fournissent aussi, presque immédiatement, une généralisation du théorème en question, due à M. E. HOPF.

Le théorème ergodique de NEUMANN est démontré par deux méthodes différentes, sous sa forme générale, forme sous laquelle l'auteur l'a déjà présenté à plusieurs occasions. La première démonstration est la même que nous avons communiquée dans les *Acta Scientiarum Math.*, 1941, vol. **10**, pp. 75—76. La même méthode est appliquée aux espaces abstraits uniformément convexes et aussi à une généralisation du théorème, due à M. DUNFORD. La seconde démonstration est une variante de celle que l'auteur a donnée dans le *Journal London Math. Society*, 1938, vol. **13**, pp. 274—278; cette variante est rédigée de sorte que l'on en puisse passer immédiatement au théorème analogue concernant l'espace fonctionnelle L^1 et qui se trouve également dans le travail que nous venons de citer.

Frédéric Riesz.

AZ AEQUIDISTANS INTERPOLÁCIÓRÓL.

Legyen $f(x)$ az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban értelmezett valós függvény. Osszuk az intervallumot $\nu-1$ egyenlő részre, s legyenek az osztópontok (a kezdő- és végpontot is számítva) valamilyen sorrendben

$$x_1, x_2, \ldots, x_\nu \qquad (\nu \geqq 2).$$

Az az egyetlen legfeljebb $(\nu-1)$-edfokú $L_\nu(x)$ racionális egészfüggvény, amelyre

$$L_\nu(x_i) = f(x_i) \qquad (i=1,2,\ldots,\nu),$$

a Lagrange-féle interpolációs formula szerint

$$L_\nu(x) = f(x_1)\,l_1(x) + f(x_2)\,l_2(x) + \cdots + f(x_\nu)\,l_\nu(x), \tag{1}$$

ahol

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_\nu)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_\nu)} \tag{2}$$

$$(i=1,2,\ldots,\nu).$$

Itt $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ az interpoláció úgynevezett *alappontjai*, $l_1(x), l_2(x), \ldots, l_\nu(x)$ az *alapfüggvényei;* $l_i(x)$ az a $(\nu-1)$-edfokú polinom, amelyre $l_i(x_i)=1$, $l_i(x_k)=0$ $(k \neq i)$.

H. TIETZE[1] megmutatta, hogy az alapfüggvények abszolút értékeinek összege[2] az intervallum *felezőpontjában* $\nu \to +\infty$

---

[1] H. TIETZE: Eine Bemerkung zur Interpolation. Zeitschrift für Mathematik und Physik 64 (1917), 74—90. old., különöskép 88. old.

[2] Ha az $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_\nu)$ függvényértékek *leolvasási hibája* legfeljebb ϱ, akkor a Lagrange-képlettel nyert értéknek a helyes $L_\nu(x)$ értéktől való eltérése (1)-ből folyólag legfeljebb

$$\varrho \sum_{i=1}^{\nu} |l_i(x)|.$$

Ez a H. TIETZE által vizsgált *«Fehler vermöge Tafelungenauigkeit»*, amit (ha eltekintünk a számításban fellépő kényszerű elhanyagolásoktól) talán az x helyen lehetséges *gyakorlati hibának* lehetne nevezni, szemben az *elméleti hibával,* ami abban áll, hogy $L_\nu(x)$ általában különbözik $f(x)$-től. Maga a $\sum_{i=1}^{\nu} |l_i(x)|$ összeg (a gyakorlati hiba felső korlátjának a leolvasási hibához való viszonya) az x helyen vett *érzékenységnek* volna nevezhető.

esetén nem korlátos, nevezetesen páros $\nu = 2n+2$ mellett

$$\sum_{i=1}^{2n+2}\left|l_i\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1.3.\cdots\overline{2n-1}}{2.4.\cdots\, 2n}\right)^2,$$

az E. LANDAU[3] más vizsgálataiban fellépett nevezetes összeg,[4]

---

[3] E. LANDAU: Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. (Zweite Abhandlung). Archiv der Mathematik und Physik (3), 21 (1913), 250—255. old., különöskép 255. old.

[4] Ez eredményhez egyszerűbben (a differencia-számítás kikerülésével) következőkép juthatunk.

Az (1) és (2) alatt felírt Lagrange-féle interpolációs formulából látható, hogy (amint jól ismeretes)

$$\sum_{i=1}^{\nu}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_\nu)}$$

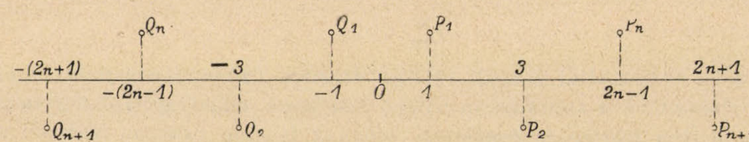
nem egyéb, mint az $x^{\nu-1}$ együtthatója a legfeljebb $(\nu-1)$-edfokú $L_\nu(x)$ racionális egész függvényben, amely az $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ helyeken rendre az $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_\nu)$ értékeket veszi fel. Ezt alkalmazva, abban a legfeljebb $2n$-edfokú $g(x)$ polinomban, amely az $1, 3, \ldots, 2n+1$ valamint a $-1, -3, \ldots, -(2n-1)$ helyeken váltakozva az 1 és -1 értékeket veszi fel (ábra), az x^{2n} együtthatója (csak az 1 helynek megfelelő tagot írva ki)

$$\cdots+\frac{1}{2.4\ldots 2n(-2)(-4)\ldots(-2n)}+\cdots=\frac{(-1)^n}{(2.4\ldots 2n)^2},$$

mert a ki nem írt részben két-két tag, amelyek rendre az 1-re szimmetrikus helyeknek felelnek meg, nyilván ellentetten egyenlő.

E polinom tehát a Newton-féle interpolációs formula szerint (egymásután a P_1; P_1, Q_1; P_1, Q_1, P_2; $\ldots$; $P_1, Q_1, \ldots, P_n, Q_n, P_{n+1}$ pontcsoportokon átmenő 0-, 1-, $\ldots$, $2n$-edfokú parabolákat szerkesztve)

$$g(x)=1-\frac{1}{2^2}(x^2-1^2)+\frac{1}{2^2.4^2}(x^2-1^2)(x^2-3^2)-\cdots+$$
$$+\frac{(-1)^n}{(2.4.\ldots 2n)^2}(x^2-1^2)(x^2-3^2)\ldots(x^2-(2n-1)^2).$$



Ez páros függvény lévén, átmegy az ábrán látható Q_{n+1} ponton is, tehát e $g(x)$ egyszersmind a $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_{n+1}, Q_{n+1}$ pontokon átmenő legfeljebb $(2n+1)$-edfokú parabola. Azonban a ± 1, $\pm 3, \ldots, \pm(2n+1)$ alap-amely tudvalevőleg $+\infty$-hez tart; aszimptotikus értéke $\frac{1}{\pi}\log n$. Ebből pedig egy Lebesgue-féle okoskodás[5] mintájára következik, hogy van olyan, az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban *folytonos* $f(x)$ függvény, amelynél $L_\nu\left(\frac{a+b}{2}\right)$ nem konvergál $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$-höz (sőt nem is korlátos).[6] H. Hahnnak egy az általános disztributív folytonos interpolációra vonatkozó tételéből[7] folyik azonban, hogy *ha $f(x)$ az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban korlátos variációjú és az $\frac{a+b}{2}$ helyen folytonos, akkor e helyen az aequidistans interpoláció konvergens, vagyis*

$$L_\nu\left(\frac{a+b}{2}\right) \to f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

midőn $\nu \to +\infty$. Az alábbiakban ez utóbbi tételnek egyszerű, közvetlen bebizonyítását mutatjuk be.

---

pontokhoz tartozó $2n+1$-edfokú alapfüggvények abszolút értékeinek összege az $x=0$ helyen nyilván $g(0)$ (H. Tietze i. h. 76. old.), ami az előbbi képletre tekintettel éppen a fenti Landau-féle összeg. Az alapfüggvények (2) alatti kifejezéséből folyólag, nyilván ugyanez az összeg értéke tetszőleges más aequidistans helyek esetében is.

[5] H. Lebesgue: Sur les intégrales singulières. Annales de la Faculté de Toulouse 1909, 25—117. old., különösképp 60—62. old. V. ö. még Haar Alfréd: Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Diss., Göttingen 1909, vagy Mathematische Annalen 69 (1910), Kap. I., §. 1.

[6] Ha ξ az intervallumnak olyan belső helye, amely a felezőponttól különbözik, vagyis melyre $\xi \neq \frac{a+b}{2}$, akkor C. Runge nyomán (Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. Zeitschrift für Mathematik und Physik 46 (1901), 224—243. old.) könnyen szerkeszthetünk olyan *analitikai* függvényt is, amelynél $L_\nu(\xi)$ nem korlátos. Nevezetesen az

$$f(x) = \frac{1}{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + c^2}$$

függvény ilyen, ha a c pozitív állandót alkalmasan (t. i. eléggé kicsinynek) választjuk. (Ezt a megjegyzést Fejér Lipót professzor úr szíves szóbeli közlésének köszönöm).

[7] H. Hahn: Über das Interpolationsproblem. Mathematische Zeitschrift 1 (1918), 115—142. old., különösképp 137. old.

Minthogy páratlan $\nu = 2n+1$ esetén $\frac{a+b}{2}$ alappont, tehát

$$L_{2n+1}\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

azért csak azt kell bebizonyítanunk, miszerint páros $\nu = 2n$ mellett

$$L_{2n}\left(\frac{a+b}{2}\right) \to f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

ha $n \to +\infty$.

*

Korlátos variációjú függvény két olyan monoton növekedő függvény különbsége lévén, amelyek annak folytonossági helyein szintén folytonosak,[8] elegendő a tételt monoton növekedő $f(x)$ esetére bebizonyítani. Nyilván feltehetjük, hogy az intervallum $-1 \leqq x \leqq 1$ és a felezőpontban felvett függvényérték

$$f(0) = 0. \tag{3}$$

Ki kell mutatnunk, miszerint

$$L_{2n}(0) \to 0, \tag{4}$$

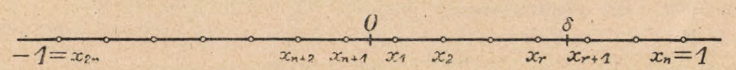
midőn $n \to +\infty$.

Legyenek az intervallum 0 felezőpontjától jobbra eső alappontok

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

a tőle balra esők pedig

$$x_{n+1} > x_{n+2} > \cdots > x_{2n}$$



(ábra). Akkor a (2) alatti alapfüggvényeknek a 0 helyen felvett értékei[9] egyszerű számítással

$$l_i(0) = l_{n+i}(0) = 2n\left(\frac{1.3.\cdots\overline{2n-1}}{2.4.\cdots 2n}\right)^2 u_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

[8] Lásd Ch.-J. de la Vallée Poussin: Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes. Bulletin de l'Académie Royale de Belgique (classe d. sc.) 1908, 319—403. old., különöskép 326—327. old.

[9] Amint a 4. jegyzetben már mondottuk, ezek a felezőpontban felvett értékek (2) alapján függetlenek az (a, b) intervallumtól.

ahol

$$u_i=(-1)^{i-1}\frac{1}{2i-1}\prod_{k=0}^{i-1}\frac{n-k}{n+k} \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{5}$$

vagyis

$$u_1=1,\ u_2=-\frac{1}{3}\frac{n-1}{n+1},\ldots,$$

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}.$$

Ha még rövidség kedvéért

$$f(x_i)=f_i \qquad (i=1,2,\ldots,2n),$$

az (1) Lagrange-képletet alkalmazva

$$L_{2n}(0)=2n\left(\frac{1.3.\cdots\overline{2n-1}}{2.4.\cdots 2n}\right)^2\left\{\sum_{i=1}^{n}f_iu_i+\sum_{i=1}^{n}f_{n+i}u_i\right\}. \tag{6}$$

Minthogy a Wallis-formulából folyólag

$$2n\left(\frac{1.3.\cdots\overline{2n-1}}{2.4.\cdots 2n}\right)^2\to\frac{2}{\pi},$$

(6)-ra tekintettel (4) be lesz bizonyítva ha kimutatjuk, miszerint $n\to+\infty$ esetén

$$\sum_{i=1}^{n}f_iu_i\to 0 \tag{7}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n}f_{n+i}u_i\to 0. \tag{7*}$$

Elegendő azonban (7)-et bebizonyítanunk, mert (7*) ugyanazt fejezi ki $\big((-1)$-gyel való szorzás után$\big)$ a $-f(-x)$ függvényre vonatkozólag.

Legyen $0<\delta<1$ s legyenek a $(0,\delta)$ intervallum belsejébe eső alappontok

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_r$$

vagyis

$$x_r<\delta\leq x_{r+1}, \tag{8}$$

ahol is r az n-től függ. A (7) alatti összeget — a szokásos módon — két részre bontjuk így:

$$\sum_{i=1}^{n}f_iu_i=\sum_{i=1}^{r}f_iu_i+\sum_{i=r+1}^{n}f_iu_i. \tag{9}$$

Mivel feltevéseink szerint

$$0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq \cdots \leqq f_r \leqq f(\delta)$$

és

$$0 \leqq f_{r+1} \leqq f_{r+2} \leqq \cdots \leqq f_n = f(1),$$

továbbá (5) alapján az

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_r$$

összeg szeletei pozitívok és a legnagyobb $u_1 = 1$, az

$$u_{r+1} + u_{r+2} + \cdots + u_n$$

összeg szeletei közül pedig abszolút értékben a legnagyobb $|u_{r+1}|$, ami kisebb $1/2r+1$-nél,[10] az Abel-féle egyenlőtlenség értelmében

$$\left|\sum_{i=1}^{r} f_i u_i\right| \leqq 2f(\delta), \tag{10}$$

illetve

$$\left|\sum_{i=r+1}^{n} f_i u_i\right| \leqq 2f(1)\frac{1}{2r+1}. \tag{11}$$

(10) és (11) alapján (9)-ből

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i u_i\right| \leqq 2\left\{f(\delta) + \frac{f(1)}{2r+1}\right\}. \tag{12}$$

Adassék mármost akármilyen kicsiny pozitív ε szám. A feltevés szerint $f(x)$ a 0 helyen folytonos lévén, (3) alapján elég kis δ-ra

$$f(\delta) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{13}$$

Másrészt, az r index (8) alatti jelentésére tekintettel, rögzített

---

[10] Megjegyezzük, hogy $|u_{r+1}|$-nek az $1/2r+1$-hez való viszonya

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)} \to 0,$$

midőn $n \to +\infty$. Ez egyszerűen következik abból, hogy

$$\lim_{n=\infty} \frac{r}{n} = \delta < 1,$$

amint az r index (8) alatti jelentéséből folyik.

δ mellett $n \rightarrow +\infty$ esetén nyilván $r \rightarrow +\infty$, tehát az ε-hoz található oly N, hogy

$$\frac{f(1)}{2r+1} < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ ha } n > N.$$

Ennélfogva δ-t a (13)-nak megfelelően választván, (12)-ből folyólag

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f_i u_i\right| < 2\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon, \text{ ha } n > N.$$

Mivel bármely pozitív ε-hoz található ilyen N, valóban fennáll (7), qu. e. d.

Szász Pál.

ÜBER DIE ÄQUIDISTANTE INTERPOLATION.

Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ und $L_n(x)$ diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade, die an den äquidistanten Stellen

$$x_i = a + (i-1)\frac{b-a}{n-1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

mit $f(x)$ übereinstimmt. Als Ergänzung zu den Ergebnissen von C. Runge,[1] H. Tietze[2] und H. Hahn[3] über Divergenzerscheinungen bei äquidistanter Interpolation, wird in dieser Note der folgende Konvergenzsatz bewiesen:

Ist die Funktion $f(x)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ von beschränkter Schwankung und an der Stelle $\frac{a+b}{2}$ stetig, so gilt die Beziehung

$$\lim_{n=\infty} L_n\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Paul v. Szász.

---

[1] C. Runge: Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. Zeitschrift für Mathematik und Physik 46 (1901), S. 224—243. insb. S. 242.

[2] H. Tietze: Eine Bemerkung zur Interpolation. Zeitschrift für Mathematik und Physik 64 (1917), S. 74—90, insb. S. 88.

[3] H. Hahn: Über das Interpolationsproblem. Mathematische Zeitschrift 1 (1918), S 115—142, insb. S. 137—142.

A WEBER-FÉLE REZOLVENS KISZÁMÍTÁSA.

Weber-féle rezolvensnek nevezzük a Lagrange-féle rezolvensek először WEBER[1] által tekintett következő különös esetét:

$$\left((-1)^{h_1}, \omega^h, r\right) = \sum_{\mu=1}^{2^n-1} (-1)^{h_1\alpha_1}\omega^{h\alpha}r^\mu \quad (\mu \text{ páratlan}), \tag{1}$$

ahol n természetes szám, h_1, h egész számok,

$$r = e^{\frac{2\pi i}{2^n}}, \quad \omega = r^4, \tag{2}$$

végül α_1, α a μ-höz

$$\mu \equiv (-1)^{\alpha_1}5^\alpha \pmod{2^n} \tag{3}$$
$$(\alpha_1=0, 1;\ \alpha=0, 1, \ldots, 2^{n-2}-1)$$

által egyértelműen hozzárendelt egész számok. Erre az α-ra nézve mindjárt megállapodunk az $\alpha = \text{ind}\,\mu$ jelölésben. Páros h mellett az (1) tudvalevően 0, s ezért tovább csak páratlan h-t tekintünk. Egyszersmind csupán az $n \geqq 5$ esetre szorítkozunk, amivel egészen egyszerű eseteket zártunk ki.

Legyen $n = 2k$, illetve $n = 2k-1$ a szerint, amint n páros vagy páratlan. Egyik előbbi dolgozatomban[2] azt nyertem, hogy eme két esetben rendre

$$\left((-1)^{h_1}, \omega^h, r\right) = (-1)^{\frac{h_1(\nu_0-1)}{2}} 2^k \omega^{h\,\text{ind}\,\nu_0} r^{\nu_0} \quad (n \text{ páros}), \tag{4_1}$$

$$\left((-1)^{h_1}, \omega^h, r\right) =$$
$$= (-1)^{\frac{h_1(\nu_0-1)}{2}} 2^{k-1}\left(\omega^{h\,\text{ind}\,\nu_0} r^{\nu_0} + \omega^{h\,\text{ind}\,\nu_1} r^{\nu_1}\right) \quad (n \text{ páratlan}). \tag{4_2}$$

Itt ν_0 a

$$h + l_1\nu_0 \equiv 0 \pmod{2^{n-k}} \quad (0<\nu_0<2^{n-k}) \tag{5}$$

feltételekből meghatározott (páratlan) egész szám, ahol l_1 az

$$5^{2^{k-2}} \equiv 1 + 2^k l_1 \pmod{2^n} \tag{6}$$

[1] H. WEBER, Lehrbuch der Algebra 2. Aufl. II (1899), 72.

[2] TIHANYI MIKLÓS, A Weber-féle rezolvens szerkezete, Mat. és Természettud. Ért. 60 (1941), 92—97.

kongruenciának eleget tevő (páratlan) egész szám, végül (páratlan n esetében)

$$\nu_1 = \nu_0 + 2^{k-1}. \tag{7}$$

Ezután már legyen n mindig páratlan. Ebben a dolgozatomban kiderül, hogy a (4_2) jobboldalán levő két tag hányadosa $\pm i$ (l. alább), ami által (4_2) átmegy a következő (most már (4_1)-hez hasonló egyszerűségű) képletbe:

$$\begin{aligned}&\left((-1)^{h_1}, \omega^h, r\right) = \\ &= (-1)^{\frac{h_1(\nu_0-1)}{2}} 2^{k-1} \omega^{h \operatorname{ind} \nu_0} r^{\nu_0} (1 + i^{1+h+2s-t}) \quad (n \text{ páratlan}),\end{aligned} \tag{$4'_2$}$$

ahol s, t a következő feltételekből meghatározott egész számok:

$$h + l_1\nu_0 = 2^{k-1}s, \tag{8}$$

$$5^{2^{k-3}} \equiv 1 + 2^{k-1}l_1 + 2^{n-2}t \pmod{2^n} \quad (t = \pm 1). \tag{9}$$

Mindenekelőtt az s egész volta (5)-ből folyik. A (9) teljesíthetőségét be kell bizonyítanunk.

Ismét nyilvánvaló, hogy

$$5^{2^{k-3}} \equiv 1 + 2^{k-1}x \pmod{2^n},$$

ahol x páratlan egész szám. Négyzetreemeléssel előáll

$$5^{2^{k-2}} \equiv 1 + 2^k x + 2^{n-1} \pmod{2^n}.$$

Ezt (6)-tal egybevetve (2-vel való osztás után)

$$2^{k-1}x + 2^{n-2} \equiv 2^{k-1}l_1 \pmod{2^{n-1}},$$

azaz

$$2^{k-1}x \equiv 2^{k-1}l_1 \pm 2^{n-2} \pmod{2^n}$$

s így (9) tényleg teljesíthető.

Hátra van még kimutatni $(4'_2)$ fennállását. Érvényesek

$$\nu_0 \equiv \pm 5^{\operatorname{ind} \nu_0} \pmod{2^n}, \quad \nu_1 \equiv \pm 5^{\operatorname{ind} \nu_1} \pmod{2^n},$$

mégpedig (7) és $k \geqq 3$ miatt egyforma előjelekkel. Osztás után ismét (7)-re való tekintettel előáll

$$5^{\operatorname{ind} \nu_1 - \operatorname{ind} \nu_0} \equiv 1 + 2^{k-1} \frac{1}{\nu_0} \pmod{2^n},$$

ahol $\frac{1}{\nu_0}$ helyébe a $\nu_0 y \equiv 1 \pmod{2^n}$ kongruenciát kielégítő bármely y (páratlan) egész szám gondolandó. Felemelve a h-dik hatványra;

$$5^{h(\operatorname{ind} \nu_1 - \operatorname{ind} \nu_0)} \equiv 1 + 2^{k-1}h\frac{1}{\nu_0} + 2^{n-1}\frac{h-1}{2} \pmod{2^n}.$$

Ebből (8) szerint

$$5^{h(\text{ind}\,\nu_1-\text{ind}\,\nu_0)} \equiv 1-2^{k-1}l_1+2^{n-2}(-1+h+2s) \pmod{2^n}.$$

Ezt (9)-cel szorozva:

$$5^{h(\text{ind}\,\nu_1-\text{ind}\,\nu_0)+2^{k-3}} \equiv 1+2^{n-2}(1+h+2s+t) \pmod{2^n}.$$

Az

$$5^{2^{n-4}} \equiv 1-2^{n-2} \pmod{2^n}$$

ismert kongruencia hatványozásával előáll

$$5^{2^{n-4}.3(1+h+2s+t)} \equiv 1+2^{n-2}(1+h+2s+t) \pmod{2^n}.$$

A jobboldalak összehasonlításával

$$h(\text{ind}\,\nu_1-\text{ind}\,\nu_0)+2^{k-3} \equiv 2^{n-4}.3(1+h+2s+t) \pmod{2^{n-2}}.$$

Minthogy (2) és (7) szerint

$$\omega^{2^{k-3}} = r^{2^{k-1}} = r^{\nu_1-\nu_0},\quad \omega^{2^{n-4}} = i,\quad \omega^{2^{n-2}} = 1,$$

azért előáll

$$\omega^{h(\text{ind}\,\nu_1-\text{ind}\,\nu_0)}r^{\nu_1-\nu_0} = i^{3(1+h+2s+t)},$$

azaz h és s páratlan volta miatt

$$\omega^{h\,\text{ind}\,\nu_1}r^{\nu_1} = \omega^{h\,\text{ind}\,\nu_0}r^{\nu_0}i^{1+h+2s-t}.$$

Eszerint (4_2)-ből tényleg folyik $(4_2')$[3].

Tihanyi Miklós.

DIE BERECHNUNG DER WEBERSCHEN RESOLVENTE.

Meine frühere Formel für den Fall $n=2k-1$ der Weberschen Resolvente (vgl. [2])

$$\left((-1)^{h_1}, \omega^h, r\right) = (-1)^{\frac{h_1(\nu_0-1)}{2}}\, 2^{k-1}(\omega^{h\,\text{ind}\,\nu_0}r^{\nu_0}+\omega^{h\,\text{ind}\,\nu_1}r^{\nu_1})$$

wird zu

$$\left((-1)^{h_1}, \omega^h, r\right) = (-1)^{\frac{h_1(\nu_0-1)}{2}}\, 2^{k-1}\omega^{h\,\text{ind}\,\nu_0}r^{\nu_0}\,(1+i^{1+h+2s-t})$$

vereinfacht, wobei ν_0, s ganz rational sind und $t=\pm 1$ ist, bestimmt aus den folgenden Beziehungen mit einem ebenfalls ganz rationalem l_1:

$$5^{2^{k-2}} \equiv 1+2^k l_1 \pmod{2^n},$$
$$h+l_1\nu_0 = 2^{k-1}s,$$
$$5^{2^{k-3}} \equiv 1+2^{k-1}l_1+2^{n-2}t \pmod{2^n}.$$

N. Tihanyi.

---

[3] Szerző megjegyzi, hogy eredeti bizonyítását RÉDEI LÁSZLÓ szíves volt a fenti egyszerűbb alakba átírni, s ezért neki e helyen is köszönetet mond.

A RÁCSPARALLELOGRAMMÁKRÓL.

Rácspontnak nevezzük a derékszögű koordinátarendszerrel ellátott sik egész koordinátákkal biró pontjait, rácsparallelogrammának minden olyan parallelogrammát, amelynek csúcsai rácspontok. Ebben a dolgozatban egyébként kizárólag «félig nyilt» parallelogrammákra gondolunk, értve ez alatt azt, hogy a parallelogrammához egész belsejét hozzászámítjuk, de határából csupán két szomszédos (egyébként tetszésszerinti) oldal elhagyásával megmaradó részt. Különösen tehát eme megállapodás értelmében minden parallelogramma egyetlen csúcsot tartalmaz.

Ismeretes az a tétel, hogy *minden rácsparallelogramma területével egyenlő számú rácspontot tartalmaz.* Ezt a tételt határátmenettel szokás bizonyítani, de újabban Veress[1] és Hajós[2] adtak rá egy-egy egyszerű elemi bizonyítást. (Mindketten a tételnek csupán azt a részét bizonyították, hogy ha a rácsparallelogramma egyetlen rácspontot tartalmaz, akkor annak területe 1, azonban a megfordítás és az általános esetre való kiterjesztés könnyen elvégezhető feladat.) Bármilyen egyszerűek ezek a bizonyítások, kiváltképen a második, amely e mellett az n-méretű térre is átvihető, talán nem lesz érdektelen alábbi két (egymással közös elemeket tartalmazó) bizonyításom. Ezek a tételt azonnal fenti általánosságában tárgyalják, s a dolgozat végén közlendő megjegyzés szerint ugyancsak kiterjeszthetők az n-méretű térre.

Első bizonyítás. Helyezzük a koordinátarendszer kezdőpontját a rácsparallelogramma ama csúcsába, amelyet ehhez hozzászámítottunk. Legyenek a szomszédos csúcsok (a, b) és (c, d).

---

[1] Veress Pál, Diophantikus egyenletek grafikus megoldása, Mat. és Fiz Lapok 48 (1941), 393—397.

[2] Hajós György, A rácsparallelogrammákról, ugyanott, 398—400.

Rácsparallelogrammánk ezután az $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrix függvényeként tekinthető. Jelekben:

$$p=p(M)=p\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Igaz a tétel akkor, ha az M egyik eleme 0. Elegendő ezt pl. a $b=0$, $a>0$, $d>0$ esetre bizonyítani. Ekkor egyrészt a terület ad, másrészt tényleg ugyanennyi a tartalmazott rácspontok száma, mert azok mind az $y=0$, $y=1,\dots$, $y=d-1$ egyeneseken vannak, mindegyiken pontosan a számú.

Az általános esetre nézve tekintsük az

$$x'=x,\quad y'=\lambda x+y \qquad (\lambda \text{ egész})$$

affin leképezést, amely p-t átviszi a $p'=p\begin{pmatrix} a & \lambda a+b \\ c & \lambda c+d \end{pmatrix}$ parallelogrammába. Minthogy leképezésünk területtartó és a rácspontok összességét kölcsönösen egyértelműen önmagára képezi le, azért p-re és p'-re a terület s a tartalmazott rácspontok száma közös. Más szóval a tétel bizonyítása közben szabad M első oszlopát bármilyen λ egész számmal szorozva a másodikhoz hozzáadni. Hasonló természetesen az «első» és «második» szavak felcserélése után is áll. Az M-en véges számú ilyen (alkalmasan választott) átalakítást végezve, 0 elemet tartalmazó matrix áll elő, s így az előrebocsátottak szerint a tételt bebizonyítottuk.

Második bizonyítás. Az előbbiek részben való felhasználásával előáll egy újabb bizonyítás, ha kimutatjuk, hogy az M matrix oszlopairól mondottak az ő soraira is állnak.

Bontsunk fel egy tetszésszerinti p rácsparallelogrammát egyik átlójával két egybevágó h, h_1 háromszögre. A h_1 eltolható (pontosan kétféleképen) olyan $\overline{h}_1$ háromszögbe, hogy h és $\overline{h}_1$ egyesítése egy p-től különböző $\overline{p}$ parallelogramma. Ezek egyenlő területűek, az utóbbi is rácsparallelogramma, s mindketten egyenlő számú rácspontot tartalmaznak, amint erről könnyen meggyőződhetünk. Megfelelő alkalmazással folyik, hogy fenti értelemben szabad M egyik sorát a másikból kivonni. Ebből hasonló az összeadásra is következik, s ismételt alkalmazással előáll a fent kívánt általánosítás, valamint ezzel a tétel bizonyítása.

Megjegyzés. Az n-méretű térben megfelelően rácsparallelotopokról beszélve, ezekhez $n.n$ típusú matrixot rendelhetünk. A megfelelő tétel féloldalas matrix esetében ismét könnyen előáll (féloldalas az olyan matrix, amelynek egyik átlója fölött vagy alatt csupa 0 elem áll), s az általánosítás tovább már önként adódik, különösen az első bizonyításnál egyszerű átfogalmazással.[3]

Rédei László.

ÜBER GITTERPARALLELOGRAMME.

In der mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem versehenen Ebene heissen die Punkte mit ganz rationalen Koordinaten Gitterpunkte, die Parallelogramme mit solchen Ecken Gitterparallelogramme. Zählt man zu diesen zwei benachbarte Seiten nicht mit, so gilt bekanntlich, dass die Anzahl der enthaltenen Gitterpunkte dem Inhalt gleich ist. Neben den üblichen Beweis mit Grenzübergang und zwei neuerdings veröffentlichte elementare Beweise (s. [1] und [2]) werden zwei weitere elementare Beweise hingestellt. (Wie ich nachträglich erfahre, befindet sich im unter [3] angeführten Lehrbuch ein weiterer elementarer Beweis.)

L. Rédei.

---

[3] Megjegyzés a korrektura alkalmával: Időközben VERESS PÁL figyelmeztetett a következő helyen található további elemi bizonyításra, amely idézett két szerzővel együtt mindhármunk figyelmét eddig elkerülte: HARDY and WRIGHT, An introduction to the theory of numbers, Oxford (1938), 27—29. Itt ugyancsak affin leképezés jut alkalmazáshoz, de a meggondolások összetettebbek mint itt közölt első bizonyításomban, s az $n > 2$ esetre való kiterjesztés újabb elemeket kíván.

AZ INTERPOLÁCIÓ ALAPFÜGGVÉNYEIRŐL.

1. Legyen adva a $-1 \leqq x \leqq +1$ számközben n különböző szám

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \tag{1}$$

és legyen

$$y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)} \tag{2}$$

további n adott szám. Akkor az (1) «alappont»-okhoz tartozó n-edik Lagrange-féle interpolációs polinom $L_n(x)$ az az egyértelműen meghatározott legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, amely az (1) helyeken rendre a (2) értékeket veszi fel. Könnyű igazolni, hogy ez a polinom a következő alakban írható:

$$L_n(x) \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k^{(n)} l_k^{(n)}(x), \tag{3}$$

ahol

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}, \qquad \omega_n(x) = (x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \ldots (x - x_n^{(n)}). \tag{4}$$

Az

$$l_k^{(n)}(x) \qquad (k=1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

polinomokat az interpoláció alapfüggvényeinek nevezzük. Az (1) számokat az n minden értékére képezhetjük és ekkor az

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \\ \cdots\cdots \end{array} \tag{6}$$

alappontcsoportot nyerjük és ezek és a megfelelő (2) számok segítségével az $L_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ interpolációs polinomsorozathoz jutunk. Ennek a sorozatnak a konvergencia-tulajdonságai — nevezetesen abban az esetben, amikor a (2) számok egy adott függvénynek az (1) helyeken felvett értékei — az alapfüggvények viselkedésétől függenek. A következőkben az alapfüggvények négyzetösszegéből alkotott polinomsorozatot vizsgáljuk, vagyis a

$$\sum_{k=1}^{n}\{l_k^{(n)}(x)\}^2 \qquad (n=1,2,\ldots) \tag{7}$$

polinomsorozatot. Alappontokul egy nevezetes és tág osztályt tekintünk. Ez az osztály azáltal van jellemezve, hogy az n minden értékére a $-1\leqq x\leqq +1$ számköz minden pontjában

$$v_k^{(n)}(x) = 1-(x-x_k^{(n)})\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

Az itt szereplő $v_k^{(n)}(x)$ lineáris függvények az HERMITE-féle interpolációnál lépnek fel. Ugyanis, mint könnyű igazolni,[1] az az egyetlen legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom $H_n(x)$, amely az (1) helyeken rendre a (2) értékeket veszi fel és amelynek differenciálhányadosa ugyancsak az (1) helyeken rendre az adott $d_1^{(n)}, d_2^{(n)},\ldots, d_n^{(n)}$ értékeket veszi fel, a következő alakban írható fel:

$$H_n(x)\equiv\sum_{k=1}^{n} y_k^{(n)}v_k^{(n)}(x)\{l_k^{(n)}(x)\}^2+\sum_{k=1}^{n} d_k^{(n)}(x-x_k^{(n)})\{l_k^{(n)}(x)\}^2. \tag{9}$$

FEJÉR bebizonyította,[2] hogy ha az (1) pontok az n-edik CSEBISEV-polinomnak a gyökei (tehát

$$x_k^{(n)} = \cos(2k-1)\pi/2n$$

és $\omega_n(x) = T_n(x) = \cos(n \arccos x)$), akkor

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=1}^{n}\{l_k^{(n)}(x)\}^2 = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad -1<x<+1 \\ 2, & \text{ha} \quad x=\pm 1. \end{cases} \tag{10}$$

[1] L. pl. L. FEJÉR, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Annalen* 106 (1932) 1—55. oldal.

[2] L. FEJÉR, Bestimmung derjenigen Abzissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglich kleines Maximum besitzt, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* X. (1932), 4—16. oldal.

És általánosabban, ha az (1) pontok az α, β paraméter értékekhez tartozó n-edik JACOBI-féle polinomnak gyökei,[3] akkor

$$0 \leqq \alpha \leqq {}^1/_2, \ 0 \leqq \beta \leqq {}^1/_2$$

esetén

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \{l_k^{(n)}(x)\}^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{1-2\beta}, & \text{ha} \quad x = 1 \\ 1, & \text{ha} \quad -1 < x < +1 \\ \dfrac{1}{1-2\alpha}, & \text{ha} \quad x = -1. \end{cases} \tag{11}$$

A most említett alappontcsoportok mind teljesítik a (6) feltételt.[4]

E dolgozat célja annak a bebizonyítása, hogy általában, *ha egy alappontcsoport olyan, hogy a* $-1 \leqq x \leqq +1$ *számköz minden pontjában a*

$$v_k^{(n)}(x) \equiv 1 - (x - x_n^{(n)}) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \geqq 0 \tag{12}$$
$$(k=1, 2, \ldots, n; \ n=1, 2, \ldots)$$

feltétel teljesül, akkor a $-1 < x < +1$ *számköz minden pontjában*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \{l_k^{(n)}(x)\}^2 = 1. \tag{13}$$

A bizonyítás a következő általános konvergencia-tételen alapul:[5] *Ha az*

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \\ \cdots\cdots \end{matrix} \tag{14}$$

---

[3] A $J_n(\alpha, \beta, x) = \omega(x)$ n-edik JACOBI-polinom a következő differenciálegyenletnek tesz eleget

$$(1-x^2)\omega'' + [2(\alpha-\beta) - 2(\alpha+\beta)x]\omega' + n[n+2(\alpha+\beta) - 1]\omega = 0.$$

Ha $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$, $J_n(\alpha, \beta, x)$-nek n különböző a $-1 \leqq x \leqq +1$ számközben fekvő gyöke van.

[4] Lásd FEJÉR [1] alatt idézett munkáját.

[5] Lásd GRÜNWALD GÉZA, A Hermite-interpolációról, *Matematikai és Fizikai Lapok* 48 (1941), 272—284. oldal.

pontcsoportsorozat «szabályos», vagyis olyan, hogy a $-1 \leqq x \leqq$ $\leqq +1$ *számköz minden pontjára*

$$v_k^{(n)}(x) = 1 - (x - x_k^{(n)}) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \geqq 0, \quad (k=1,2,\ldots,n;\ n=1,2,\ldots) \tag{15}$$

akkor tetszőleges a $-1 \leqq x \leqq +1$ *számközben folytonos függvényre a* $-1 < x < +1$ *számköz minden pontjában*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) v_k^{(n)}(x) \{l_k^{(n)}(x)\}^2 = f(x). \tag{16}$$

Szükségünk lesz még az e tétel bizonyításához szükséges és fentidézett dolgozatunkban kimutatott

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} |x - x_k^{(n)}| \{l_k^{(n)}(x)\}^2 = 0, \quad (-1 < x < 1) \tag{17}$$

relációra is, amely következménye a (15) feltételnek.

2. Mielőtt a bizonyításhoz kezdenénk, néhány előkészítő megjegyzést teszünk.

Legyen $\lambda > 0$ fix szám és tekintsük azokat a k indexeket $(1 \leqq k \leqq n)$, amelyekre[6] x_k a $-1+\lambda \leqq x \leqq 1-\lambda$ számközben van. Ezekre a k-kra

$$\left| \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right| \leqq \frac{1}{\lambda} \tag{18}$$

és

$$v_k(x) \leqq 1 + \frac{2}{\lambda}. \tag{19}$$

Ugyanis vagy az $(1 - x_k) \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$ vagy a $(-1 - x_k) \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}$ pozitív, tehát $v_k(+1) \geqq 0$, $v_k(-1) \geqq 0$ miatt

$$\left| \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right| \leqq \min \left(\frac{1}{1 - x_k}, \frac{1}{1 + x_k} \right);$$

figyelembevéve k-ra tett $1 - x_k \geqq \lambda$, $1 + x_k \geqq \lambda$ feltevésünket kapjuk, hogy

$$\left| \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right| \leqq \frac{1}{\lambda}.$$

---

[6] A továbbiakban, mivel ez félreértésekre nem vezethet, az n indexet elhagyjuk.

Továbbá

$$v_k(x) = 1 - (x-x_k)\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \leqq 1 + |x-x_k| \left|\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right| \leqq 1 + \frac{2}{\lambda}.$$

A (17)-ből következik, hogy tetszőleges fix $\delta > 0$-ra

$$\lim_{n=\infty} \sum_{|x-x_k|>\delta} l_k^2(x) = 0 \qquad (-1 < x < +1), \tag{20}$$

ahol $\sum\limits_{|x-x_k|>\delta}$ — mint szokásos — azt jelenti, hogy az összegezést mindazon k indexekre kell elvégezni, amelyekre $|x-x_k| > \delta$.

Valóban (17)-ből adódik, hogy

$$\lim_{n=\infty} \sum_{|x-x_k|>\delta} |x-x_k|\, l_k^2(x) = 0,$$

amiből, tekintve, hogy

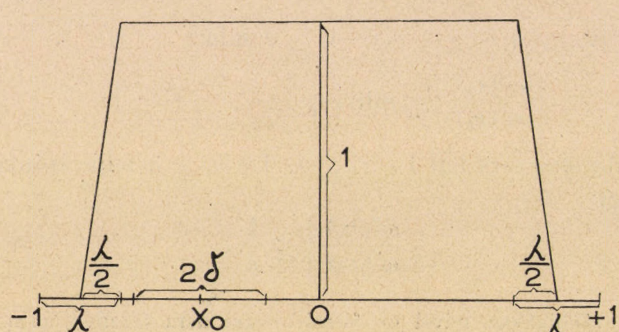
$$\sum_{|x-x_k|>\delta} |x-x_k|\, l_k^2(x) > \delta \sum_{|x-x_k|>\delta} l_k^2(x),$$

következik állításunk.

3. Legyen $f(x)$ a következő függvény (l. az ábrát)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -1 \leqq x \leqq -1 + \lambda/2 \\ 2/_\lambda x + \dfrac{2-\lambda}{\lambda}, & \text{ha} \quad -1+\lambda/2 \leqq x \leqq -1+\lambda \\ 1, & \text{ha} \quad -1+\lambda \leqq x \leqq 1-\lambda \\ -2/_\lambda x + \dfrac{2-\lambda}{\lambda}, & \text{ha} \quad 1-\lambda \leqq x \leqq 1-\lambda/2 \\ 0, & \text{ha} \quad 1-\lambda/2 \leqq x \leqq 1, \end{cases} \tag{21}$$

ahol $\lambda > 0$ fix szám.



Az $f(x)$ függvény folytonos a $-1 \leqq x \leqq +1$ számközben, így az 1. pontban idézett tétel szerint a $-1 < x < +1$ számköz minden pontjára

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, v_k(x)\, l_k^2(x) = f(x). \tag{22}$$

Vegyünk most már fel a $-1+\lambda < x < 1+\lambda$ számközben egy tetszőleges, de a továbbiakban fixen tartott x_0 pontot. Az x_0 pontban és ennek elegendő kis környezetében $f(x)=1$. Legyen 2δ egy olyan az x_0 pontot középpontként tartalmazó számköznek a hossza, amelyben $f(x)=1$.

Tekintsük a

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, v_k(x_0)\, l_k^2(x_0) \tag{23}$$

összeget. Σ-t a következőképen két részre bontjuk:

$$\Sigma = \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} f(x_k)\, v_k(x_0)\, l_k^2(x_0) + \sum_{|x_0-x_k| > \delta} f(x_k)\, v_k(x_0)\, l_k^2(x_0) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{24}$$

Vizsgáljuk először a Σ_1-t. Az itt szereplő k indexek olyanok, hogy $f(x_k)=1$; tehát

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} f(x_k)\, v_k(x_0)\, l_k^2(x_0) = \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} v_k(x_0)\, l_k^2(x_0) = \\ &= \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} l_k^2(x_0) - \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} (x_0-x_k) \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\, l_k^2(x_0).\end{aligned} \tag{25}$$

Mivel a tekintetbe vett k indexekre x_k a $-1+\lambda \leqq x \leqq 1-\lambda$ számközben van, alkalmazhatjuk a (18) egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}\Big| \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} (x_0-x_k) \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\, l_k^2(x_0) \Big| &\leqq \frac{1}{\lambda} \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} |x_0-x_k|\, l_k^2(x_0) \leqq \\ &\leqq \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |x_0-x_k|\, l_k^2(x_0).\end{aligned} \tag{26}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a jobboldala (17) szerint zérushoz tart, ha $n \to \infty$, tehát (25) és (26)-ot figyelembevéve

$$\Sigma_1 = \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} l_k^2(x_0) + \varepsilon_n, \tag{27}$$

ahol $\varepsilon_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

Σ_2 vizsgálatánál vegyük először is figyelembe, hogy az $f(x)$ definíciója miatt olyan k indexű tagok, amelyekre x_k a $-1 \leqq x \leqq -1+\lambda/2$ vagy az $1-\lambda/2 \leqq x \leqq +1$ számközbe esik, nem szerepelnek (ugyanis ilyen x_k-ra $f(x_k)=0$). A megmaradó indexekre pedig (19) szerint

$$v_k(x_0) \leqq 1 + 4/\lambda$$

(vegyük figyelembe, hogy jelen esetben a (19)-beli λ szerepét $\lambda/2$ vette át). Tehát

$$\Sigma_2 = \sum_{|x_0-x_k|>\delta} f(x_k)\, v_k(x_0)\, l_k^2(x_0) < (1+4/\lambda) \sum_{|x_0-x_k|>\delta} f(x_k)\, l_k^2(x_0) < $$
$$< (1+4/\lambda) \sum_{|x_0-x_k|>\delta} l_k^2(x_0),$$

amiből (20)-at figyelembevéve adódik, hogy

$$\Sigma_2 = \varepsilon_n', \tag{28}$$

ahol $\varepsilon_n' \to 0$, ha $n \to \infty$.

A (23), (24), (27) és (28) együtt adja, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, v_k(x_0)\, l_k^2(x_0) = \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} l_k^2(x_0) + \varepsilon_n'', \tag{29}$$

ahol $\varepsilon_n'' \to 0$, ha $n \to \infty$. Mivel (22) miatt (29) baloldala 1-hez konvergál, ha $n \to \infty$, kapjuk, hogy

$$\lim_{n=\infty} \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} l_k^2(x_0) = 1. \tag{30}$$

Végül tekintetbevéve, hogy (20) szerint $\sum\limits_{|x_0-x_k|>\delta} l_k^2(x_0) \to 0$, nyerjük, hogy

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x_0) = \lim_{n=\infty} \sum_{|x_0-x_k| \leqq \delta} l_k^2(x_0) + \lim_{n=\infty} \sum_{|x_0-x_k|>\delta} l_k^2(x_0) = 1, \tag{31}$$

amivel tételünket bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy a (16) és (17) egyenletesen érvényes a $-1 < x < +1$ számköz minden fix részközében, amiből következik, hogy *a*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) = 1$$

reláció a $-1 < x < +1$ számköz minden fix részközében egyenletesen érvényes.

Grünwald Géza.

ÜBER DIE GRUNDFUNKTIONEN DER INTERPOLATION.

Sind $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ reelle Punkte, die dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ angehören $(n=1, 2, \ldots)$, so lauten die zu dieser Punktgruppenfolge gehörige Lagrangeschen Interpolationsformeln

$$y_1^{(n)} l_1^{(n)}(x) + y_2^{(n)} l_2^{(n)}(x) + \cdots + y_n^{(n)} l_n^{(n)}(x). \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Sie stellen diejenigen ganzen rationalen Funktionen von höchstens $(n-1)$-tem Grade dar, die an den Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ der Reihe nach die Werte $y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_n^{(n)}$ annehmen. Hier bezeichnet $l_k^{(n)}(x)$ die zur Interpolationsstelle $x_k^{(n)}$ gehörigen «Grundfunktion» der Lagrangeschen Interpolation. Sie ist diejenige ganze rationale Funktion von genau $(n-1)$-tem Grade, die an der Stelle $x = x_k^{(n)}$ den Wert 1 annimmt, an allen übrigen Stellen $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k-1}^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ aber verschwindet. Die explizite Form von $l_k^{(n)}(x)$ ist

$$\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})},$$

wo $\omega_n(x)$ das Polynom $(x-x_1^{(n)})(x-x_2^{(n)}) \ldots (x-x_n^{(n)})$ bezeichnet. Wir beweisen den folgenden Satz: *Es sei die Punktgruppenfolge so beschaffen, dass*

$$1 - (x - x_k^{(n)}) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \geqq 0 \quad (k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots;\ -1 \leqq x \leqq +1);$$

dann ist

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} \{l_k^{(n)}(x)\}^2 = 1.$$

Wir beweisen diesen Satz mit Hilfe eines allgemeinen für die Hermiteschen Interpolationspolynome gültigen Konvergenzsatzes (siehe Fussnote [5]).

Géza Grünwald.

A HIBABECSLÉS ALAPJAI.

1. §. Célkitűzés.

A gyakorlati számolás többnyire nem szolgáltat pontos, csak közelítő értéket. Ennek oka többféle: igen sok esetben (pl. fizikai, technikai számítások) a kiindulási adatok sem lehetnek pontosak s így az eredmény is pontatlan; nem is tudunk mindent pontosan kiszámítani (pl. π tizedesjegyeiből csak véges sokat határozhatunk meg); sokszor nem akarunk pontosan számolni, még ha tudnánk is, mert a pontos eredmény utolsó jegyei a gyakorlatban értéktelenek (pl. egy tartó teherbírását nem számítjuk grammokra, a kamatot csak fillérekig számítjuk), vagy mert az így előálló munkamegtakarítást többre értékeljük az eredmény pontosságánál (pl. hozzávetőleges számítások).

A számított értéknek a valóditól való eltérése, azaz a *hiba* figyelemmel kísérése hasznos szolgálatokat tehet. A számoló matematikust, a mérő fizikust, a méretező technikust egyaránt érdekli eredményének hibája, hogy a számított jegyek közül melyek a megbízhatók. A hiba ismeretében kitűnhetik a számítás egy részének felesleges volta s így annak elhagyása időt és fáradságot kímél. Számítások ellenőrzésénél a hiba ismerete nélkül bizonyosat nem állíthatunk. Ha a hibát nem is akarjuk figyelemmel kísérni, akkor is célszerű tudnunk, milyen eljárással lehet kevés fáradsággal és mégis jó közelítéssel meghatározni az eredményt.

Jó szolgálatokat tehet ezek szerint egy olyan számoló és *hibabecslő eljárás,* amelyik az eredményt érdektelen jegyek nélkül szolgáltatja, kis hibával jár s annak jó becslését adja, nem sok munkát igényel, kevés és egyszerű szabály fejben tartását kívánja meg. E követelmények egymásnak részben ellentmondanak: pl. a hiba kicsinysége a többinek. Ezért közvetíteni kell közöttük s így nincs a feladatnak egyértelműen meghatározott legjobb megoldása.

A következőkben ilyen szellemben tárgyaljuk a számolásnál nélkülözhetetlen műveleteket. *Csak gyakorlati célokat kívánunk követni*, ezért sok állításunk csak gyakorlatilag helyes. Erre az állásfoglalásra azért van szükség, hogy a tiszta elméletnek a gyakorlati kivitelt sokszor megbénító igényességétől és általánosságától megszabaduljunk.

Nem foglalkozunk a valószínűségszámításnak a hibabecslésnél való alkalmazásával. Mindamellett gyakorlati célkitűzésünk következményeként teljesen nem nélkülözhetjük a valószínűségi meggondolásokat.

Csak a négy alapművelettel és a táblával végzett számításokkal foglalkozunk. Ezek a nélkülözhetetlen s leggyakrabban használt eszközei a numerikus számításoknak. Bár sok megjegyzésünk a segédeszközzel (pl. számológép, logarléc) végzett számításra is áll, elvileg csak a segédeszközt nem használó számításokat tárgyaljuk.

A teljes hibabecslő eljárás alkalmazása többnyire *csak hosszabb számításoknál ill. sokjegyű számok használatakor* mutatkozik előnyösnek. Különben a csekély munkamegtakarítás és esetenkinti utólagos igazolása annak, hogy a hiba valóban nem befolyásolhatja a bennünket érdeklő jegyeket, nem éri meg, hogy eltérjünk a legjobban begyakorolt közönséges számítástól. Vannak továbbá közelítő eljárások (pl. gyökközelítés a regula falsi módszerével), amelyeknél a számítás egyes részleteinél hibabecslésre elvileg sincsen szükség.

Nem járunk eleddig járatlan utakat. Elsőnek GAUSS hangsúlyozta a feladat fontosságát és vázolta a megoldás útjait. A matematikai tankönyvek majd mindegyike feldolgozza a hibabecslés egyik-másik részletét. A numerikus eljárásokkal foglalkozó művek némelyike teljességre törekvő összeállítást is ad.[1] A szerzők azonban a felsorolt követelmények egyikét vagy másikát előnyben

[1] A jelen dolgozatban tárgyaltakkal kapcsolatban elsősorban a következő összefoglaló művek említendők: LÜROTH: Numerisches Rechnen (1900), MEHMKE: Numerisches Rechnen (Enc. Math.Wiss. I. 938—1079 l.) és ennek francia átdolgozása d'OCAGNE—MEHMKE: Calculs numériques (Enc. Sci. Math. I. 23, 196—452 l.).

részesítik ill. figyelembe sem veszik. Így nem lesz talán felesleges, ha *a hibabecslés ismert elemeit rendszerbe foglaljuk s azokat néhol kiegészítjük.*

E helyen is megköszönöm VERESS PÁL úrnak, hogy értékes tanácsaival és megjegyzéseivel támogatott és hozzásegített dolgozatom teljesebbé tételéhez.

2. §. Adat és hibája.

Adatnak nevezünk minden olyan értéket, amelyet számításunknál felhasználunk. Ezeket vagy készen kaptuk (kiindulási adatok), vagy megelőző számítás szolgáltatta azokat.

A kiindulási adatok általában hibásak. Hiszen ezeket legtöbbször mérés vagy táblázat szolgáltatja. Az első esetben a mérés korlátolt elvégezhetősége s műszereink fogyatékossága, a második esetben a táblázatok korlátolt befogadóképessége a hiba forrása. A fortiori hibásak tehát a számítások szolgáltatta adatok is.

A hibás adatokat szabatosan szám helyett számközzel lehet jellemezni. A számköz határai oly számok, melyek közrefogják a valódi értéket. E határok számtani közepét tekintjük adatnak s így ennek hibája nem nagyobb a számköz hosszának felénél, ez a *hibakorlát.*[2] A hibakorlát s az adat hányadosát százalékban szokás kifejezni, ez a viszonylagos hiba korlátja.

Azt a tényt, hogy pl. $\sqrt{2}$ az (1·41415, 1·41425) számközbe esik, így szokás kifejezni:

$$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142 \pm 0{\cdot}5.10^{-4}.$$

Ha megállapodnak abban, hogy a hibakorlátot mindig az adat utolsó jegye helyiértékének többszöröseként fejezzük ki, akkor e helyiérték kiírását elhagyva és a $\pm$ jelet zárójellel pótolva a rövidebb

$$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142 \quad (0{\cdot}5)$$

írásmódhoz jutunk. Az így zárójelbe kerülő számot *hibamutatónak* nevezzük.

[2] Ezzel szemben hibahatárnak nevezhetnők az általunk megállapítható legkisebb hibakorlátot. A gyakorlatban ilyennek a megállapítása, ha lehetséges is, fáradságos és nem szokásos, ezért mindig a hibakorlát elnevezést használjuk.

Az adatnak első 0-tól különböző jegyét első értékes jegynek nevezzük. Azt az utolsó jegyét pedig, melynek helyiértékére a hibamutató vonatkozik, a rákövetkező esetleges zérusoktól való megkülönböztetés céljából utolsó értékes jegynek mondjuk. Ezeknél az elnevezéseknél az «értékes» jelzőt sokszor el is hagyjuk.

Egy adat gyakorlatilag akkor használható, ha hibamutatója kicsiny, néhány egységet nem halad meg. Kívánatos, hogy a hibamutató kevésjegyű szám legyen, már a kétjegyűt is kerüljük s lehetőleg csak számítás közben használjuk. Hiszen a hibabecslés csak kísérője magának a számításnak s így helyénvaló, hogy lehetőleg egyszerű legyen.

Nem foglalkozunk azzal, hogy mérés szolgáltatta adatok hibakorlátja hogyan határozható meg, ez mindenesetre csak valószínűségi ítélet lehet.

Helyesen szerkesztett *táblázatból kiolvasott érték hibakorlátja az utolsó jegy helyiértékének fele,* azaz hibamutatója 0·5, amint azt könnyű belátni. A jól fejben tartott adatok szintén táblázatból kiolvasottaknak tekinthetők.

A hibakorlátnak számközzel való értelmezéséből következik, hogy ha a megállapított hibakorlát helyett nagyobbat írunk, pontatlanabb bár, de helyes állításhoz jutunk; viszont kisebbel való pótlása helytelen állításhoz vezethet. Ezért a *hibakorlátot felfelé kerekítjük,* ha pl. kevesebb jegyűvé akarjuk tenni.

A hibakorlát megállapításánál mindig a legrosszabb esettel számolunk. Az elképzelhető legrosszabb eset pedig általában nem következik be, sőt sok esetben — főként hibák halmozódásakor — nem is következhetik be. E tény és a számítás közben alkalmazott felkerekítések megengedik, hogy — eltérve az imént kimondott elvtől — a hibakorlátot önmagához viszonyítva kicsiny mennyiséggel csökkenthessük. A hibakorlátnak sok esetben valószínűségi jellege a mondottakat csak alátámasztja. Másként szólva: gyakorlatilag megengedhető a hibakorlátnak 1-nél kevéssel kisebb számmal való szorzása.

Ha az adatot önkényesen megváltoztatjuk, hacsak nem akarunk pozitív és negatív irányban különböző nagy hibákkal számolni,[3]

[3] Gauss figyelmeztet (Werke, Bd. 3, 242 l.) egy táblával kapcsolatban, amelyik nyomdatechnikailag megkülönbözteti a fel- és lekerekítés-

a hibakorlátot ugyanannyival növelnünk kell, amennyivel az adatot megváltoztattuk. Tehát pl.

$$\sqrt{2} = 1{\cdot}4142\ (0{\cdot}5) = 1{\cdot}414\ (0{\cdot}25) = 1{\cdot}414\ (0{\cdot}3).$$[4]

Az adat kerekítését célszerű úgy végezni, hogy a hibakorlátot kevéssel kelljen növelnünk. Ezért az adat megtartott jegyei közül az utolsót a rákövetkező s már elhagyott jegy szerint igazítjuk, vagyis megtartjuk ill. 1-el növeljük a szerint, amint a rákövetkező jegy 5-nél kisebb, ill. 5[5] vagy ennél nagyobb.[6] Ha egy számot nem teljes egészében veszünk figyelembe, hanem csak egy szeletét tekintjük, e szeletet mindig ily igazítással képezzük; pl. π négy tizedes jegyre 3·1416.[7]

Ha az adatot — az adathoz viszonyítva kicsiny — hibakorlátjához képest is kicsiny mennyiséggel változtatjuk, ezt megtehet-

---

sel nyert utolsó jegyeket, hogy a két irányban különféle nagy hibák figyelemmel kísérése annyira nehézkes, hogy e helyett érdemesebb eggyel több jegyre végezni az egész számítást. (V. ö. azonban [5] utolsó megjegyzését.)

[4] Megjelölt hibájú mennyiségek esetében az «egyenlőség» megszűnik szimmetrikus lenni, csak balról jobbra olvasható. Észszerű lenne az egyenlőség jele helyett a «benne van» ϵ jelének használata.

[5] Ha csak egyetlen 5-ös jegyet hagyunk el, közömbös, hogy felfelé igazítunk-e vagy sem. Mihelyst azonban az 5-ös után más jegyek is állanak, már indokolt a felfelé igazítás. Ezért az 5-ös elhagyásakor egyöntetűen mindig felfelé igazítunk. — Hosszabb számításnál, amelynél több ízben hagyunk el egyetlen 5-öst, mindenesetre észszerű, hogy csak minden második ilyen alkalommal igazítsunk felfelé. — Ha a kerekítéssel nyert szám 5-ösre végződik és számolunk további kerekítés lehetőségével akkor helyénvaló (pl. nyomdatechnikailag) annak megjelölése, hogy vajjon a számvégző 5-ös felfelé vagy lefelé igazítással keletkezett-e. Ha egy függvénytábla így megkülönbözteti a kétféle számvégző 5-öst, akkor abból kerekítéssel helyes, eggyel kevesebb jegyű táblát alkothatunk; ha így megkülönbözteti a kétféle számvégző zérust is, akkor abból kerekítéssel helyes, akárhánnyal kevesebb jegyű táblát alkothatunk.

[6] Mondani szokás, hogy 0,...,4 nem ad, 5,...,9 pedig ad javítást.

[7] Így képezett szeletet keresünk, amikor pl. «egy *számot* négy tizedesre pontosan» akarunk meghatározni. Más feladat pl. «egy *szám jegyeit* a negyedik tizedesig» meghatározni; mert pl. π első jegyei: 3·1415 ...

jük a fentebb mondottak értelmében a nélkül, hogy gyakorlatilag nagyobb hibával kellene számolnunk. Vagyis áll a gyakorlati szabály, hogy *másodrendű kicsinyek elhanyagolhatók.*[8]

2. §. Eredmény és hibája.

Műveletnek tekintünk általában minden olyan eljárást, amely bizonyos adathoz vagy adatokhoz egy értéket, *eredményt* rendel. Ilyen értelemben művelet pl. nemcsak a szorzás, hanem a táblával való logaritmuskeresés, vagy valamely függvény egy helyettesítési értékének megállapítása is.

Az eredmény pontatlansága két okra vezethető vissza. Egyrészt pontatlan lehet azért, mert az adatok maguk is hibásak voltak; másrészt, mert a műveletet nem végeztük ill. nem végezhettük pontosan.[9]

Az eredmény hibájának azt a részét, amely akkor is fellép, ha a műveletet pontosan végezzük, amely tehát kizárólag az adatok hibás voltából ered, *öröklött hibának* nevezzük.

Viszont az eredmény hibájának ama részét, amely még akkor is fellép, ha az adatok hibátlanok, amely tehát kizárólag a művelet pontatlan elvégzéséből ered, *műveleti hibának* mondjuk.

---

[8] A másodrendű kicsinyeket a mondottak értelmében nem azért hanyagoljuk el, mert a pontosságot szántszándékkal csökkenteni akarjuk, hanem mert figyelembe vételük a pontosságot gyakorlatilag nem növeli. Hogy mi tekinthető másodrendű kicsinynek, az a fentiek szerint csak akkor állapítható meg, ha tudjuk, hogy az adat milyen hibával határozható meg. Pl. a vonalas hőtágulás $l = l_0(1 + \alpha t)$ képletéből kiindulva a köbös tágulásra $v = v_0\ (1 + 3\alpha t)$ képlet adódik, mert α meghatározása olyan nagy hibával jár, hogy a képletünk adta *v hibakorlátjához képest* az elhagyott tagok kicsinyek. — Másként is lehet értelmezni a másodrendű kicsinyeket és indokolni elhanyagolásukat, t. i. amikor eleve csak lineáris függést vizsgálunk (különösen infinitézimális meggondolásoknál) vagy amikor a számítás egyszerűsítése kedvéért a hibát szántszándékkal növeljük.

[9] Mindenesetre a figyelemnek erős összpontosítására van szükség, hogy *tévedés* következtében további hiba ne lépjen fel. A tévedés lehetőségét erősen korlátozza vagy éppen megszünteti az *ellenőrzés.* Az ellenőrzés módjaival nem foglalkozunk, bár nagy a gyakorlati jelentőségük és jó, ha már a számítás berendezésénél is tekintettel vagyunk az ellenőrzés lehetőségére.

Minthogy a kétféle hiba független egymástól, az eredmény hibakorlátja az öröklött s a műveleti hiba korlátjainak összege.[10]

A műveleti hibát ismét két részre hasíthatjuk, bonyolultabb műveleteknél ugyanis valamely — rendesen képletbe foglalt — utasítás alapján számítjuk az eredményt s e számítás közben már csak a legegyszerűbb műveletek szerepelnek (t. i. az alapműveletek és a táblából való kiolvasás). A műveleti hibát tehát egyrészt az utasítás hibás volta, másrészt a számolás pontatlansága okozhatja. A műveleti hiba ama részét, amely még akkor is fellépne, ha a számolást tökéletes pontossággal végeznők (vagyis szükség esetén végtelen sok jegyre számolnánk és végtelen sokjegyű, de nem sűrűbb beosztású táblát használnánk) *képlethibának*[11] nevezzük. A műveleti hiba megmaradó része a *számolási hiba*.

Lényeges különbség az öröklött s a műveleti hiba között, hogy az elsőt adataink megtartása esetén nem csökkenthetjük, ellenben a műveleti hibát tetszőleges kicsinnyé tehetjük : a képlethibát új, jobb képlet keresésével, a számolási hibát pontosabb számolással s többjegyű tábla használatával. Ezért észszerű a művelet elvégzése előtt megállapítani az öröklött hiba korlátját, hogy azután a műveleti hibát ehhez idomítsuk. Az öröklött hiba korlátját megközelítő vagy annál nagyobb műveleti hiba feleslegesen durva számolásra, az ahhoz viszonyítva kicsiny műveleti hiba pedig feleslegesen végzett munkára utal.

Minthogy a képlethiba figyelemmel kísérése a legnehézkesebb, sok esetben olyan műveleti utasítást, képletet alkalmazunk, hogy a képlethiba a számolási hiba mellett elhanyagolható kicsiny legyen s így figyelemmel kísérését megtakaríthassuk.

A dolog természetéből következik, hogy a különböző alkalmazásoknak és érdeklődési irányoknak megfelelően a hibák felsorolt fajtái közül másik-másik lép előtérbe. A legérdekesebb matematikai problémákat a képlethiba veti fel és csak képlethiba lép fel betűk-

---

[10] E tényre világosan utal a logaritmusok hibáival kapcsolatban Gauss: Theoria motus corporum coelestium, art. 31. (Werke, Bd. 7, 40—41 l.) E helyen a műveleti hibának a következőkben tárgyalandó kétfélesége is kiolvasható.

[11] Lüroth nem pontosan ebben az értelemben használja a «Formelfehler» elnevezést.

kel való számoláskor, ezért az elméleti matematikust csak a képlethiba érdekli,[12] tehát pl. végtelen sor maradéktagja, interpoláló függvény eltérése, közelítő képlet adta érték hibája. Fizikai és technikai számításoknál az öröklött hiba rendesen olyan nagy, hogy ehhez képest még a legegyszerűbb számítás műveleti hibája is elhanyagolható. Táblázatok szerkesztésekor a számolási hibának van aránylag nagy jelentősége.

A többféle hiba egymást igen nagy valószínűséggel legalább részben lerontja, mégis kénytelenek vagyunk a legrosszabb esetre gondolva mindig összegezni a különféle hibák korlátait. Ezért a becslési eljárás adta hibakorlát gyakorlatilag többnyire feleslegesen nagy. E körülményen csak úgy segíthetnénk, ha nem a hibakorláttal, hanem a hiba valószínűségi eloszlásával vagy pl. ennek szórásával, a négyzetes középhibával jellemeznők az eredmény pontosságát. Ennek előfeltétele természetesen, hogy az adatok is ilyen módon legyenek jellemezve.[13]

4. §. A négy alapművelet.

Az alapműveleteknél képlethibáról, annak értelmezéséből kifolyólag, nem lehet szó. Számolási hiba sincs a közönségesen végzett összeadásnál, kivonásnál és szorzásnál. A közönségesen végzett osztás számolási hibájának korlátja, ha az osztást észszerűen «inkább megvan benne q-szor»[14] mondással zárjuk, az utolsó jegy helyiértékének fele.

Részletesebben csak az öröklött hibáról kell szólnunk. Az egyes műveleteknél A és B pozitív adatok fognak szerepelni, melyeknek előjeles hibái α és β, hibakorlátjaik pedig a és b. Tehát a valódi értékek $A+\alpha$ és $B+\beta$ s a hibákra $|\alpha| \leqq a, |\beta| \leqq b$.

---

[12] Így pl. a logaritmuskeresésnek csak a képlethibájáról szól BEKE: Differenciál- és integrálszámítás I. 151—152 l., ezért következtetései is csak azzal a feltevéssel helytállók, hogy másfajta hiba nincs.

[13] Régebbi ilyen irányú kísérleteket találunk a táblával végzett értékmegállapítással kapcsolatban (v. ö. LÜROTH i. m. 143. l.). Újabb valószínűségszámítási eredmények megadják a kérdés elintézéséhez szükséges elméleti segédeszközöket. Gyakorlati alkalmazásuk rendszeres tárgyalásáról nincs tudomásom.

[14] A q lehet egyjegyű egészszám vagy 10. Utóbbi esetben a hányados már leírt jegyeit meg kell változtatnunk.

Az összeg ill. különbség hibája

$$|[(A+\alpha)\pm(B+\beta)]-[A\pm B]|=|\alpha\pm\beta|\leqq a+b.$$

Vagyis az *összeg ill. különbség öröklött hibájának korlátja a tagok hibakorlátjainak összege.* A szabály természetesen változatlanul érvényes több tag esetében is.

A szorzat hibája jelöléseink szerint

$$|(A+\alpha)(B+\beta)-AB|=|A\beta+B\alpha+\alpha\beta|\leqq(Ab+Ba)+ab.$$

Mivel ab kicsiny az egész korláthoz képest, elhanyagolható s így a hibakorlát gyakorlatilag: $Ab+Ba$. Ebből AB-vel osztva adódik, hogy a *szorzat viszonylagos hibakorlátja a tényezők viszonylagos hibakorlátainak öszege.*

A hányados hibája hasonlóan

$$\left|\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{-A\beta+B\alpha}{B(B+\beta)}\right|\leqq\frac{Ab+Ba}{B(B-b)}=\frac{Ab+Ba}{B^2\left(1-\frac{b}{B}\right)}.$$

Az $(1-\frac{b}{B})$ tényező 1-nél kevéssel kisebb s így helyette 1-et írva a hibakorlát gyakorlatilag: $\frac{Ab+Ba}{B^2}$. Vagyis az $\frac{A}{B}$ hányados öröklött hibájának korlátja az AB szorzat ily korlátjának s a nevező négyzetének hányadosa. Osztással megállapítható, hogy — a szorzatról mondotthoz hasonlóan — a *hányados viszonylagos hibakorlátja az osztó és osztandó ily korlátjainak összege.*

Megemlítjük hogy a levezetett szabályok egy általános szabály alesetei. E szerint általában az $f(A_1,\ldots,A_n)$ függvényérték öröklött hibájának korlátja, ha az $A_1,\ldots,A_n$ adatok hibakorlátai $a_1,\ldots,a_n$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial A_1}\right|a_1+\cdots+\left|\frac{\partial f}{\partial A_n}\right|a_n.$$

Ez a szabály is, miként a fentiek, a másodrendű kicsinyek elhanyagolásával bizonyítható.

Példa. A $\pi=3{\cdot}14159$ (0·5) és $\sqrt{2}=1{\cdot}41421$ (0·5) adatok szorzatát akarva számítani, az öröklött hiba korlátja

$$3{\cdot}14159.0{\cdot}5.10^{-5}+1{\cdot}41421.0{\cdot}5.10^{-5}=2{\cdot}27790.10^{-5}$$

Ha tehát közönséges szorzást alkalmazunk, az eredmény

$$\pi\sqrt{2}=4{\cdot}4428679939\ (227790).$$

Ilyen eredmény gyakorlatilag használhatatlan. Az adat változtatásával s a hibakorlát kerekítésével

$$\pi\sqrt{2} = 4{\cdot}44287\ (2{\cdot}47851) = 4{\cdot}44287\ (3) = 4{\cdot}4429\ (1).$$

Végeredményünk már megnyugtató, mert hibamutatója 1 s így nincs gyakorlatilag értéktelen jegye.

Példánk elijesztő s nem követendő példa volt. Mutatja, hogy a pontosan végzett alapműveletek felesleges munkával, gyakorlatilag értéktelen jegyek meghatározásával járnak. Célszerűnek mutatkoznék az alapműveletek oly elvégzése, amely csak értékes jegyeket szolgáltat s amelynél a művelet folyámán is csak oly jegyeket határozunk meg, amelyek lényegesen befolyásolják az eredmény értékes jegyeit. Ilyen műveleti utasítás természetesen már műveleti hibát is okoz.

5. §. Megszabott pontosságú alapműveletek.

Az imént felvetett probléma megoldásai a megszabott pontosságú[15] alapműveletek. Ezeknél előre megszabjuk az eredmény utolsó jegyének helyiértékét: pl. az eredményt tízezredekig határozzuk meg.

Igen sokféle ilyen műveleti utasítás alkotható[16] és minthogy két ily utasítás közül a jobbik megállapítására határozott elv nincs, a sokféle utasítás között helyességi sorrendet megállapítani nem lehet.

Mi a következőkben olyan műveleti utasításokat adunk amelyeknél *a számolási hiba korlátja*[17] *gyakorlatilag minden esetben az*

---

[15] Szerepel a «korlátolt pontosságú» s a «korlátozott pontosságú» elnevezés is.

[16] E sokféle utasítás összeállítását adják az [1] alatt idézett enciklopédia-cikkek. Megszabott pontosságú szorzást először Bürgi és Prätorius műveiben találunk a XVI. század végén. Megszabott pontosságú osztást először Kepler alkalmaz (Opera omnia, 7. kötet, 306 l.) a XVII. század elején. Középiskoláink tananyagában is szerepeltek 1925-ig megszabott pontosságú műveletek s kereskedelmi iskoláinkban ma is szerepelnek.

[17] A megszabott pontosságú műveletekkel foglalkozó szerzők legtöbbje a hibakorlátot nem vizsgálja, vagy csak a hibakorlátnak az adatoktól függő utólagos megállapításával foglalkozik. Rendszeres tárgyalást ad azonban s ugyancsak az utolsó jegy helyiértékét állapítja meg minden esetben korlátként Serret-Combeousse: Traité d'arithmétique.

eredmény utolsó meghatározott jegyének helyiértéke, azaz hibamutatója 1.[18] Műveleti utasításaink megválasztását e hibabecslés egyszerűsége és az a tény indokolja, hogy hibabecslő szabályunk érvényessége kb. éppen a gyakorlatban előforduló esetekre terjed csak ki. Hibabecslő szabályunk indokolja a megszabott «pontosságú» elnevezést és azt a szokott kifejezést, hogy amikor pl. az eredményt ezredekig határozzuk meg, azt mondjuk, hogy ezred «pontossággal» számolunk. Az adatok valamelyikénél fölébe helyezett ponttal jelöljük meg emlékeztetés céljából azt a jegyet, melynek helyiértéke az eredmény utolsó jegyének helyiértéke lesz.[19]

Mivel az alapműveleteknél képlethiba nincs, számolási hiba helyett műveleti hibát is mondhatunk. Az öröklött hibát a most következőkben nem kísérjük figyelemmel, vagyis az adatokat pontosaknak tekintjük.

Összeadás. A megszabott pontosságú összeadással és kivonással csak teljesség kedvéért foglalkozunk. A gyakorlatban ugyanis az egyes tagokat rendesen annyi tizedesjegyre ismerjük, amennyire az eredményt ismerni akarjuk.

Műveleti utasítás: Az összeadandókat szokott módon egymás alá írjuk s az összegezést a ponttal megjelölt oszloptól egy hellyel jobbra kezdjük. Az ebben az oszlopban álló «segédjegyeket» a rákövetkező jegyek szerint igazítjuk. Az igazított segédjegyek összegének egyesét nem írjuk le, hanem az összeg tizedrészét egészre kerekítjük s az így kapott számot maradványnak tekintve az összeadást a ponttal megjelölt oszloptól kezdve a szokott módon folytatjuk.

Az itt adott műveleti utasításokat azonban nem követjük, elsősorban mert adandó utasításainkhoz viszonyítva azoknál a hiba valószínűségi eloszlása kedvezőtlenebb, másrészt mert azoknál a lefelé és felfelé elkövetett hiba külön taglalása vezet a hibakorlát megállapításához.

[18] Azt gondolhatná valaki, hogy olyan utasítás alkotása lenne célszerű, amelyiknél a számolási hiba korlátja az utolsó jegy helyiértékének *fele*. Az utolsó jegy ily meghatározása azonban szükségessé teheti nem korlátozhatóan sok rákövetkező jegy meghatározását is; e tény táblák szerkesztésekor sok gondot okoz. Ezért a mondott kívánság minden esetben érvényes rövidített műveleti utasítással nem teljesíthető.

[19] Szokás az is, hogy a műveleti jel fölé írjuk a szükségelt tizedes jegyek számát; pl. $\overset{2}{\times}$ azt jelenti, hogy a szorzatot a századokig határozzuk meg.

Hibabecslés: Az igazított segédjegyek mindegyikének hibája 0·5 lehet. Összegük hibája tehát n összeadandó esetében legfeljebb $n.0{\cdot}5$. A következőkben az $n \leqq 10$ esetre korlátozzuk figyelmünket. Ekkor a segédoszlop összegének hibája legföljebb 5, s így ennek tizedrészéé 0·5. A kerekítés újabb 0·5 hibát eredményezhet s így a maradvány hibakorlátja 1. Vagyis az így számított *összeg hibakorlátja az utolsó jegy helyiértéke.* Ez a szabály szigorúan csak legfeljebb tíz összeadandó esetében érvényes, azonban gyakorlatilag még jóval több összeadandó esetében is érvényesnek tekinthető, mivel a tagok hibái egymást igen nagy valószínűséggel lerontják.[20]

Kivonás. Az összeadásról mondottak különböző előjelű tagok összegére is alkalmazhatók, ha pl. a negatív tagokat oly különbségekként állítjuk elő amelyeknél a kivonandó egészszám. Mégis külön megemlítjük az egyszerű kivonás esetét, mert ennél segédjegyek használata felesleges.

Műveleti utasítás: A kisebbítendő alá írva a kivonandót a ponttal megjelölt oszlopban álló jegyeket a rákövetkezők szerint igazítjuk[21] s ezután a kivonást a közönséges módon végezzük.

Hibabecslés: Az igazított utolsó jegyek mindegyikének hibája 0·5 lehet s így különbségük hibája legfeljebb 1. Vagyis *a különbség hibakorlátja az utolsó jegy helyiértéke.*

Szorzás egyjegyű számmal. Ezzel külön egyrészt azért foglalkozunk, mert itt egyszerűbb utasítás adható, mint többjegyű szorzónál; másrészt ezzel megkönnyítjük a következő műveletek tárgyalását. Egyjegyű szorzó esetében voltaképen az összeadásról mondottakat alkalmazzuk.

Műveleti utasítás: A szorzandó ponttal megjelölt jegye mellett jobbra álló «segédjegyet» a rákövetkező szerint igazítjuk. Az igazított segédjegy s a szorzó szorzatának egyesét nem írjuk le, hanem

---

[20] Annak valószínűsége, hogy a hiba eleget tegyen szabályunknak — hosszabb számítás tanúsága szerint — 50 összeadandó esetében kb. 99·9% és még 100 összeadandó esetében is kb. 99·0%.

[21] Ez az igazítás felesleges, a hibabecslés e nélkül is ugyanahhoz az eredményhez vezet, s a hiba valószínűségi eloszlása akkor is ugyanaz. Serret ezt az egyszerűbb szabályt adja. Csak az egyöntetűség kedvéért adjuk mégis a fenti szabályt.

e szorzat tizedrészét egészre kerekítjük s az így kapott számot maradványnak tekintve, a szorzást a ponttal megjelölt jegytől kezdve a szokott módon végezzük.

Példa. 231·568 nyolcszorosát a tizedekig határozzuk meg.

$$\begin{array}{r} 2\;3\;1{\cdot}\dot{5}\;6\;8\,.\,8 \\ \hline 1\;8\;5\;2{\cdot}6 \end{array}$$

A műveletet a következő szavakkal kísérjük: nyolcszor *hét* az ötvenhat, marad *hat*, nyolcszor öt az ...

Hibabecslés:[22] Az igazított segédjegy hibája 0·5 lehet. Ezt a 9-nél nem nagyobb szorzóval szorozva legfeljebb 4·5 hiba állhat elő s a szorzat tizedrészének hibája 0·45 lehet. A kerekítés újabb 0·5 hibát eredményezhet s így a maradvány hibája legfeljebb 0·95.[23] Ezt az értéket 1-re kerekítve, mondhatjuk, hogy az egyjegyű szorzóval képezett *szorzat hibakorlátja az utolsó jegy helyiértéke.*

Szorzás többjegyű számmal. Nem akarván a jól begyakorlott közönséges szorzástól feleslegesen eltérni, csak az annak mintájára berendezett megszabott pontosságú szorzással foglalkozunk.[24]

---

[22] Az egyjegyű szorzóval képzett szorzat hibájával foglalkozik CRELLE: Note sur la division abregée en arithmétique (Journal für r. u. a. Math. *31* (1846), 167—173 l.). Érvelése azonban nem mindenben helytálló.

[23] A hiba csakugyan lehet 0·95, de lényegében csak akkor, amikor 0·45 kilencszeresét számítjuk az egyesekig; itt a hibát felfelé követjük el. A lefelé elkövethető hiba felső határa csak 0·85. Az utóbbi kisebb annak a megállapodásunknak következtében, hogy az 5-ös elhagyásakor *mindig* felfelé igazítunk. Ha viszont az 5-ös elhagyásakor *sohasem* igazítanánk felfelé, akkor a megfelelő határ felkerekítésnél 0·76, lekerekítésnél 1·04 volna; ekkor tehát még nagyobb volna az aszimmetria. Elvileg a leghelyesebb szabály az volna, hogy a segédjegyet a 2. § szabálya szerint igazítjuk, s ha az igazított segédjegy szorzata 5-re végződik, ezt a szerint kerekítjük lefelé vagy felfelé, amint a segédjegyet felfelé igazítással kaptuk vagy sem; ekkor a hibák felső határa mindkét esetben 0·85 volna. E szabály azonban csak az egyöntetűség rovására volna alkalmazható s így gyakorlatilag nem ajánlható.

[24] A hinduk által (VI. század) is ismert, FOURIER-féle vagy szimmetrikus szorzásnak nevezett eljárás alapján is lehet megszabott pontosságú műveletet alkotni. Így jár el CAUCHY (Oeuvres, (1) *5*, 443—449 l.) az ellenőrzés egy módjára is rámutatva. A szimmetrikus szorzásnak szokatlanságán kívül további hátránya, hogy sok mellékszámítást vagy fejszámolást követel.

Műveleti utasítás: A szorzandó ponttal megjelölt jegyét követő[25] jegy alá írjuk a szorzó egyes jegyét; a szorzó többi jegyét fordított sorrendben e mellé.[26] A szorzó minden egyes jegyével — az egyjegyű számmal való szorzás szabálya szerint — megszorozzuk a szorzandót az illető jegy felett álló jegyéig.[27] Az így kapott részletszorzatokat úgy írjuk egymás alá, hogy utolsó jegyeik egy oszlopot alkossanak.[28] A részletszorzatokat — az összeadásra adott utasítás szerint — az utolsóelőtti oszlopig adjuk össze.[29] A tizedespontot az eredményben úgy helyezzük el, hogy utolsó jegyének helyiértéke a ponttal megjelölt legyen.

Példa. Határozzuk meg 6·5974 és 4·5316 szorzatát a századokig.

$$\begin{array}{r}
6{\cdot}\dot{5}\,9\,7\,4 \\
6\,1\,3\,5\,4 \\
\hline
2\,6\,3\,9\,0 \\
3\,2\,9\,9 \\
1\,9\,8 \\
7 \\
4 \\
\hline
2\,9{\cdot}9\,0
\end{array}$$

[25] Kevésbbé pontos eljárás az, amikor az egyes jegyet a ponttal megjelölt alá írjuk, a műveletet a fentiek szerint folytatjuk, végül természetesen a részletszorzatokat teljes egészükben összeadjuk. Ez az eljárás szerepelt s szerepel részben ma is — a segédjegy igazítása nélkül — iskoláink tananyagában. Ennek használatával — még a segédjegy igazítása mellett is — a műveleti hiba ötjegyű szorzó esetében az utolsó jegy helyiértékének 3·6-szeresét is elérheti; ez az eljárás tehát gyakorlatilag előforduló esetben értéktelen utolsó jegyet szolgáltathat. Mindenesetre azonban kicsiny annak a valószínűsége, hogy a hiba az említett értéket megközelítően nagy legyen, oly annyira, hogy az eljárásnak a tananyagban való szerepeltetése nem kifogásolható (különösen, ha az utasítást az a megjegyzés kíséri, hogy a szükségeltnél eggyel több jegy meghatározása után az eredmény kerekítéssel állapítandó meg).

[26] Ezt a felírási módot W. Oughtred vezette be a XVII. század elején. Alkalmazása a műveleti utasítást egyöntetűvé teszi.

[27] Tehát az illető jegy felett egy hellyel jobbra álló jegyet a rákövetkező szerint igazítjuk s ez igazított jegy szorzásával kezdjük a részletszorzat számítását. A kapott szorzat egyesét azonban nem írjuk le, hanem ...

[28] Nem foglalkozunk annak a könnyen belátható ténynek igazolásával, hogy ily módon egyforma helyiértékű jegyek kerülnek egymás alá. Hasonló megjegyzés áll szabályaink több részletére.

[29] Tehát az utolsó oszlop (ezt rákövetkező hiányában igazítanunk sem kell) összeadásával kezdjük. Az összeg egyesét azonban nem írjuk le, hanem ...

A műveletet így kezdtük: négyszer négy az tizenhat, marad *kettő*, négyszer hét az ...; s a részletszorzatok kiszámítása után így folytattuk: az összeg 28, marad *három*, ...

Hibabecslés: Minden egyes részletszorzat hibája a már tárgyaltak szerint legfeljebb 0·95. Korlátozzuk figyelmünket legfeljebb ötjegyű szorzóra. Ekkor legfeljebb öt részletszorzat van s az utolsó oszlop összegének hibája legfeljebb 5.0·95=4·75, tehát tizedrészéé 0·475. A kerekítés újabb 0·5 hibát eredményezhet s így a maradvány hibája legfeljebb 0·975. Ezt az értéket 1-re kerekítve mondhatjuk, hogy a *szorzat hibakorlátja utolsó jegyének helyiértéke*. E szabály, bár legfeljebb ötjegyű szorzóra szorítkozva vezettük le, még hatjegyű szorzóra is szigorúan helyes.[30] Minthogy gyakorlati számításokban hatnál több értékes jeggyel bíró számok csak igen ritkán fordulnak elő[31] s a hiba még akkor is igen nagy valószínűséggel eleget tesz szabályunknak, ez gyakorlatilag mindig érvényesnek tekinthető.

Osztás. Miként a szorzásnál, itt is csak a közönséges osztás mintájára alkotott megszabott pontosságú osztással foglalkozunk.[32]

Műveleti utasítás: Az osztandó és osztó első értékes jegyeinek helyiértékéből a hányados első jegyének helyiértékére következtetünk s megállapítjuk a hányados jegyeinek számát. Az osztóból

---

[30] Egy részletszorzat hibája ugyanis csak akkor lehet 0·95, ha képzésénél a segédjegy 4 s ez után 5-ös áll. Két egymást követő részletszorzat mindegyikének hibája így nem lehet 0·95. Az esetek leszámolása mutatja, hogy két egymást követő részletszorzat összes hibája 2.0·95 =1·9 helyett legfeljebb csak 1·615 lehet (ez előáll 0·465 és 8·9 szorzatát az egyesekig számítva). Így hat egymást követő részletszorzat összes hibájának korlátja 3.1·615 =4·845, tehát fenti okoskodásunk hatjegyű szorzó esetében is alkalmazható. — Hétjegyű szorzóra szabályunk szigorúan már nem érvényes, pl. 465·46545 és 918·9189 szorzatát az egyesekig számítva a hiba közel 1·0007. Azonban még ilyen ellenpéldát sem könnyű találni.

[31] A mai legpontosabb méréseknél: a színképelemzésnél 7, a csillagászatban 8—10 értékes jegy is meghatározható. A politikai számtanban helyenként 11—13 jegyű adatok is előfordulnak.

[32] A szimmetrikus szorzás megfordítását, az ú. n. FOURIER-féle osztást lényegében már a középkorban ismerték. Ennek hátránya a szimmetrikus szorzásról mondottakon kívül, hogy a számolási hiba megállapítása rendkívül nehézkes (v. ö. LÜROTH i. m. §§ 17—24), előnye azonban hogy egyben megszabott pontosságú osztásnak is tekinthető

eggyel több[33] jegyet tartunk meg, mint ahány jegyű a hányados lesz; az osztandóból pedig annyit, hogy az (tizedespontokra nem nézve) a megtartott osztónál nagyobb legyen, viszont annak tízszeresét ne érje el.[34] A megtartott osztandó utolsó jegyét a rákövetkező szerint igazítjuk.[35] Az osztás folyamán nem az osztandó egy-egy újabb jegyét írjuk a maradék mellé, hanem az osztó egy-egy újabb jegyét vágjuk le. A maradékok megállapítása céljából a hányados jegyeivel — az egyjegyű számmal való szorzás szabálya szerint — az osztót az utolsó le nem vágott jegyéig szorozzuk.[36] Amikor az osztó már csak kétjegyű, megállapítjuk, hogy az utolsó maradékban a kétjegyű osztó[37] «inkább» hányszor van meg.[38] A tizedespontot úgy helyezzük el az eredményben, hogy utolsó jegyének helyiértéke a ponttal megjelölt legyen.

Példa. Meghatározandó 362·476 és 173·9238 hányadosa az ezredekig.— A kezdő jegyek osztása (vagyis 3 százas osztva 1 százassal) egyest ad;[39]

---

[33] Az iskoláinkban szerepelt s szereplő utasítás szerint nem eggyel több, hanem ugyanannyi jegyet tartunk meg, azonban az osztást egyjegyű osztóig folytatjuk. Ha fenti utasításunkat ezzel a módosítással alkalmazzuk, a hiba pl. ötjegyű hányados esetében már 3·5-szeresét is elérheti az utolsó jegy helyiértékének (v. ö. [25]).

[34] Az utasítás eddigi részét így is megfogalmazhatjuk: A ponttal megjelölttől balra ill. jobbra annyiadik lesz a megtartott osztandó utolsó jegye, ahányadik az osztó tizesétől balra ill. jobbra annak első jegye; az osztóból lehető legtöbb jegyet tartunk meg, úgy hogy (tizedespontokra nem nézve) a megtartott osztó a megtartott osztandónál ne legyen nagyobb. A [33] alatt említett egyszerűsített utasítás esetében a most mondottak úgy alkalmazhatók, hogy az osztó tizese helyett annak egyesét tekintjük. — Előfordul, hogy az osztandónak és osztónak nincs annyi jegye, ahánynak megtartását az utasítás előírja. Ilyenkor kellő számú 0 hozzáírása szükséges (lásd pl. jelen § végén az 1. példát és v. ö. a 6. § osztási utasítását).

[35] Ha ebben az esetben felfelé kell igazítanunk, célszerű ezt emlékeztetésül a jegy föléhúzásával jelölnünk.

[36] Tehát az utoljára levágott jegyet a rákövetkező szerint igazítjuk, ennek az igazított segédjegynek szorzatából állapítjuk meg a maradványt, . . .

[37] Ekkor a kétjegyű osztó mellé gondoljuk tizedesjegyekként az osztó levágott jegyeit.

[38] V. ö. [14].

[39] Ha az osztó történetesen 1 helyett pl. 8-cal kezdődnék, akkor azt mondanók, hogy: 36 tizes osztva 8 százassal tizedet ad.

a hányados első jegyének helyiértéke 1, az utolsóé 0·001 s így jegyeinek száma négy ; az osztóból tehát megtartunk öt jegyet s az osztandóból a 17392-nél közvetlenül nagyobb 36247-et ;[40] ez utóbbi utolsó jegyét a rákövetkező 6 szerint felfelé igazítjuk (ennek jelzésére föléhúzzuk).

$$
\begin{array}{l}
3\;6\;2{\cdot}4\;\overline{7}\,|\,\dot{6} : 1\;7\;\underline{3}{\cdot}\underline{9}\;\underline{2}\,|\,3\;8 = 2{\cdot}0\;8\;4\\
\quad 1\;4\;6\;3\\
\qquad\quad 7\;2
\end{array}
$$

Az osztás így kezdődik : 36248-ban a 17392 megvan kétszer, kétszer *négy* az nyolc, marad *egy*, kétszer kettő négy meg egy az öt, meg három az *nyolc*, ... ; s így végződik : 72-ben a 17 (ill. 17·39 ...) inkább megvan négyszer.

Hibabecslés: A megtartott osztandó hibája az igazítás után legfeljebb 0·5, minden egyes ebből levont részletszorzat hibája a már tárgyaltak szerint legfeljebb 0·95, tehát az utolsó maradék hibája n-jegyű hányados esetében (amikor is n—1 részletszorzatot vonunk le) $0{\cdot}5+(n-1)0{\cdot}95$. Korlátozzuk figyelmünket legfeljebb ötjegyű hányadosra. Az utolsó maradék hibája így legfeljebb 4·3. Ennek s a kétjegyű osztónak hányadosa, mivel az utóbbi 10-nél nagyobb, legfeljebb 0·43. A hányados utolsó jegyének hibája tehát a záró osztás 0·5 hibakorlátját is figyelembe véve legfeljebb 0·93. Ezt az értéket 1-re kerekítve ismét mondhatjuk, hogy *a hányados hibakorlátja az utolsó jegyének helyiértéke*. Bár levezetésünkben ötjegyű hányadosra szorítkoztunk, a szabály hat-, sőt hétjegyű hányadosra is szigorúan érvényes.[41] Ha valamivel többjegyű hányadossal van

---

[40] A [34] alatti utasítás szerint így járunk el : Az osztó első jegye a tizestől balra az első, tehát az osztandó ponttal megjelölt jegyétől balra az első lesz a megtartott osztó utolsó jegye ; az osztónak az így maradó 36247-nél közvetlenül kisebb szelete 17392.

[41] Miként a fentiekből kiolvasható, szabályunk n-jegyű hányadosra helyes, ha n—1 egymást követő részletszorzat összes hibája legfeljebb 4·5. Szabályunk tehát hatjegyű hányadosra helyes, mert öt egymást követő részletszorzat összes hibája [30] szerint legfeljebb $2.1{\cdot}615+0{\cdot}95=4{\cdot}18$. Egyszerűen nem látható be, hogy még hat egymást követő részletszorzat összes hibája sem lehet 4·5 ; [30] szerint korlátnak $3.1{\cdot}615=4{\cdot}845$ adódik ; az esetek leszámolása mutatja, hogy három egymást követő részletszorzat összes hibája legfeljebb 2·3145 (ez előáll egyesig számítva 4·545 és 9·19 szorzatát) s így hat részletszorzatra korlátként 4·629 adódik ; négy vagy öt egymást követő részletszorzat összes hibájának külön taglalása nem vezet megfelelő eredményhez. Csak hosszabb vizsgálódás

is dolgunk, a hiba igen nagy valószínűséggel eleget tesz szabályunknak s így gyakorlatilag mindig érvényesnek tekinthető.

Foglalkozhattunk volna megszabott pontosságú hatványozással és gyökvonással is.[42] Ezt azért nem tettük, mert a gyakorlatban ezeket a műveleteket, hacsak nem kerek eredményhez vezetnek, rendesen megkerüljük, pl. logaritmusok használatával.

1. példa a teljes hibabecslési eljárásra, amikor is az öröklött s a műveleti hiba egyaránt figyelembe veendő. Meghatározandó a $\pi=3{\cdot}14159$ (0·5), $\sqrt{2}=1{\cdot}41421$ (0·5) adatokból kiindulva $x=\frac{\pi\sqrt{2}}{\pi+\sqrt{2}}$.

a) $s=\pi\sqrt{2}$ öröklött hibájának korlátja

$$3{\cdot}2.0.5.10^{-5}+1{\cdot}5.0{\cdot}5.10^{-5}<2{\cdot}4.10^{-5}.$$

A műveletet 10^{-5} pontossággal végezzük, a teljes hiba korlátja tehát $3{\cdot}4.10^{-5}$ lesz.

$$\begin{array}{r}
3{\cdot}1\;4\;1\;5\;\dot{9}\\
1\;2\;4\;1\;4\;1\\
\hline
3\;1\;4\;1\;5\;9\;0\\
1\;2\;5\;6\;6\;3\;6\\
3\;1\;4\;1\;6\\
1\;2\;5\;6\;6\\
6\;2\;8\\
3\;1\\
\hline
s=4{\cdot}4\;4\;2\;8\;7\;(3{\cdot}4
\end{array}$$ [43]

b) Minthogy $n=\pi+\sqrt{2}=4{\cdot}55580$ (1), az $\frac{s}{n}$ hányados öröklött hibájának korlátja

$$\frac{4{\cdot}5.10^{-5}+4{\cdot}6.3{\cdot}4.10^{-5}}{4{\cdot}5^2}<1.10^{-5}.$$

A műveletet 10^{-5} pontossággal végezzük s így a teljes hibakorlát 2.10^{-5} lesz.

---

mutatja, hogy hat egymást követő részletszorzat összes hibája 4·5-nél biztosan kisebb, sőt még 4·35-öt sem érheti el. — Nyolcjegyű hányados esetében szabályunk szigorúan már nem érvényes, pl. 9231961604 és 100·46546545 hányadosát az egyesekig számítva a hiba 1·03-nál több.

[42] Megszabott pontosságú négyzetgyökvonással foglalkoznak pl. az [1] alatt idézett munkák.

[43] V. ö. számításunkat a 4. § példájával. Maga a számolás egyszerűbb lett, viszont ennek terhére az eredmény pontatlanabb. — A pontatlanság mérvét részben önkényes mozzanatok (a becslés mikéntje, a műveleti hiba korlátjának megválasztása) szabják meg.

$$
\begin{array}{l}
4{\cdot}4\,4\,2\,8\,\dot{7}\,0 : 4{\cdot}5\,\underline{5}\,\underline{5}\,\underline{8}\,\underline{0} = 0{\cdot}9\,7\,5\,2\,1 \\
\;\;3\,4\,2\,6\,5\,0 \\
\;\;\;\;2\,3\,7\,4\,4 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;9\,6\,5 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;5\,4
\end{array}
$$

Végeredményünk tehát $x=0{\cdot}97521$ (2).

2. példa. Meghatározandó 20 év múlva esedékes 7962·86 P jelenlegi értéke, ha a kamatláb évi utólagos 5%. Vagyis a tőke szorzandó a táblázatból kiolvasott $1{\cdot}05^{-20}=0{\cdot}376889$ (0·5) értékkel. — Mivel az eredményt századokig (fillérekig) akarjuk ismerni, az öröklött hibát itt nem a műveletnél alkalmazandó pontosság megállapítása céljából, hanem annak eldöntése végett becsüljük meg, vajjon feladatunk megoldásához a használt tábla kielégítően pontos-e. Minthogy a tőke hibája 0, az öröklött hiba korlátja

$$8000.0{\cdot}5.10^{-6} = 0{\cdot}4.10^{-2}$$

s ez kielégíthet bennünket.

$$
\begin{array}{lr}
 & 7\,9\,6\,2{\cdot}8\,\dot{6}\;\;\;\;\; \\
 & 9\,8\,8\,6\,7\,3\,0 \\
\hline
 & 2\,3\,8\,8\,8\,5\,8\;\;\; \\
 & 5\,5\,7\,4\,0\,0\;\;\; \\
 & 4\,7\,7\,7\,7\;\;\; \\
 & 6\,3\,7\,0\;\;\; \\
 & 6\,3\,7\;\;\; \\
 & 7\,3\;\;\; \\
\hline
(0{\cdot}4+1=1{\cdot}4) & 3\,0\,0\,1{\cdot}1\,2\;\;\;(1{\cdot}4)
\end{array}
$$

Helyes eredménynek tehát 3001·12 P tekinthető.[44]

6. §. Természetes pontosságú alapműveletek.

Az 5. § 1. példája mutatja, hogy a megismert módszer, bár egyszerű műveleteket ír elő, a művelet elvégzése előtt az öröklött hiba esetenkinti megbecslését követeli s ez a becslés nem annyira egyszerű, hogy a gyakorlati számoló az ismertetett módszert fenntartás nélkül hasznosnak vallhassa. A gyakorlat szívesebben látna olyan számolási utasítást, amelyik esetleg valamivel pontatlanabb eredményhez vezet ugyan, azonban nem követel esetenkinti hoszszabb hibabecslést és lehetőleg éppen az eredmény megbízható

[44] Bár a hiba korlátja 1·4 fillér, a valódi hiba a már többször hangsúlyozott elvek értelmében oly nagy valószínűséggel kisebb ennél, hogy eredményünket — mint legvalószínűbb értéket — helyesnek tekinthetjük.

részét szolgáltatja, vagyis *természetes pontosságú*. Amikor az alkalmazandó pontosság már eleve ismeretes (pl. 5. § 2. példa), ilyen egyszerűsítésre nincs szükség és nincs is lehetőség.

A következőkben a mondott tulajdonsággal bíró, természetes pontosságú műveleti utasításokat adunk.[45] Mint érdemleges esetekkel, csak a szorzással és osztással foglalkozunk. Miként a megszabott pontosságú műveleteknél, itt sem lehet arról szó, hogy az adandó utasítások legcélszerűbb mivoltát bizonyítsuk. Azok megválasztását egyöntetűségük és a hibabecslés egyszerűsége indokolja.

Mindkét műveletnél A és B pozitív adatok fognak szerepelni. a_1 legyen a legkisebb egészszám, amelyre $A<10^{a_1}$; vagyis A első jegyének helyiértéke 10^{a_1-1}. Másrészt A utolsó jegyének helyiértéke legyen 10^{a_2}. Tehát A jegyeinek száma a_1-a_2. Az A adat hibamutatója legyen h_a, vagyis hibakorlátja $h_a.10^{a_2}$. Hasonlóan értelmezzük B-hez tartozóan a b_1, b_2, h_b mennyiségeket.

Szorzás. Az AB szorzat öröklött hibájának korlátja

$$Ah_b\cdot 10^{b_2}+Bh_a\cdot 10^{a_2}<h_b\cdot 10^{a_1+b_2}+h_a\cdot 10^{b_1+a_2}=$$
$$=(h_b\cdot 10^{a_1-a_2}+h_a\cdot 10^{b_1-b_2})\cdot 10^{a_2+b_2}.$$

Legyen A jegyeinek száma nem több B jegyeinek számánál, azaz $a_1-a_2\leqq b_1-b_2$. Ezt figyelembe véve az öröklött hibára korlátként

$$(h_a+h_b)\cdot 10^{a_2+b_1}$$

adódik. Bár megbecslésünk lényegesen növelhette a hibakorlátot, nagyságrendileg nem sokat tévedhettünk. Becslésünk arra a gondolatra vezet, hogy a szorzást $10^{a_2+b_1}$ pontossággal végezzük. A teljes hibakorlát így

$$(h_a+h_b+1)\cdot 10^{a_2+b_1}$$

lesz. Ha a szorzást az 5. § szabálya szerint 10^p pontossággal végezzük, a tényezők egymás alatt álló jegyei helyiértékének szorzata 10^{p-1}, a most alkalmazandó szorzásnál e szorzat tehát $10^{a_2+b_1-1}$ kell, hogy legyen. Az A szorzandó[46] alá fordított rendben írt B jobb szélső jegyének helyiértéke 10^{b_1-1}, ezek szerint ennek a 10^{a_2}

[45] Nincs tudomásom más ily irányú vizsgálatról.

[46] A többjegyű B-t tekintve szorzandónak ugyanannyira használható más utasításhoz juthatunk.

helyiértékű jegy, azaz A utolsó jegye alá kell kerülnie. Ezeknek megfelelően választjuk műveleti utasításunkat.

Műveleti utasítás: A megadott tényezők közül a kevesebb értékes jeggyel bírót, ill. ha ilyen nincs, a tényezők valamelyikét szorzandónak választjuk. A szorzandó utolsó jegye alá írjuk a szorzó első jegyét s a többit balra e mellé. A műveletet az 5. § előírása szerint végezzük. A tényezők első jegyének helyiértékéből a szorzat első jegye helyiértékére következtetünk s az eredményben a tizedespontot ennek megfelelően helyezzük el.[47] Ha a tényezők hibamutatói h_a és h_b, akkor az így számított szorzat hibamutatója

$$h_a + h_b + 1.$$ [48 49]

1. példa. Meghatározandó az $m=752{\cdot}673$ (3) g tömeg súlya $g=980{\cdot}852$ (1) ismeretében.

$$\begin{array}{lr}
 & 752{\cdot}673 \\
 & 258089 \\
\hline
 & 6774057 \\
 & 602138 \\
 & 6022 \\
 & 377 \\
 & 15 \\
\hline
(3+1+1=5) \quad mg = & 738261 \; (5) \text{ dyn}
\end{array}$$

2. példa. Meghatározandó az $r=315{\cdot}8$ (2) cm sugarú kör kerülete. — Mivel π jegyeit fölös számban ismerjük, ez lesz a szorzó s jegyeiből annyit veszünk figyelembe, amennyi a szorzó felírásakor még hasznosnak mutatkozik. Ha így járunk el, a szorzó hibája 0-nak tekinthető. A szorzandó $2r=631{\cdot}6$ (4).

---

[47] A tizedespont elhelyezését így is szabályozhatjuk: A fordított rendben leírt szorzó egyese felett egy hellyel balra álló jegyet fölébe helyezett ponttal jelöljük meg. Az eredményben a tizedespontot úgy helyezzük el, hogy utolsó jegyének helyiértéke a ponttal megjelölt jegyével egyezzék.

[48] Jobban takarékoskodva a felkerekítésekkel jobb becslést kaphattunk volna. Sok értelme azonban nincs annak, hogy becslésünket egyszerűsége rovására finomítsuk, hiszen rendelkezésünkre áll az 5. § példáiban megismert s túlságosan bonyolultnak szintén nem mondható becslési eljárás.

[49] Előnyös, ha $h_a + h_b$ legalább néhány egységnyi, egyébként a művelet feleslegesen durvának mondható. Szükség esetén elérhetjük ezt az előnyös helyzetet azáltal, hogy adatainkhoz egy 0-t fűzünk, amikor is a hibamutatók megtízszereződnek (v. ö. 3. példa).

$$
\begin{array}{lrr}
 & & 631{\cdot}6 \\
 & & 951413 \\
\hline
 & & 18948 \\
 & & 632 \\
 & & 253 \\
 & & 6 \\
 & & 3 \\
 & & 1 \\
\hline
(4+0+1=5) & 2r\pi = & 1984\ (5)\ \text{cm}
\end{array}
$$

3. példa. 1' ívmértéke 0·00029089 (0·5). Meghatározandó 12°35' ívmértéke. — Mint önkényes adat, az adott szög hibátlannak veendő, tehát percmértéke, azaz 755' végtelen sokjegyűnek tekinthető, ez lesz a szorzó. Képletünk szerint h_a=0·5-hez a művelet folytán 1 járulna; hogy ezt a túlzott hibanövelést elkerüljük, a szorzandót a 0-al bővített 0·000290890 (5) alakban tekintjük.

$$
\begin{array}{lrr}
 & & 0{\cdot}000290890 \\
 & & 557 \\
\hline
 & & 2036230 \\
 & & 145445 \\
 & & 14545 \\
\hline
(5+0+1=6) & 12°35' = & 0{\cdot}219622\ (6)
\end{array}
$$

Osztás. Legyen az A/B hányados első jegyének helyiértéke 10^{c_1-1} s a megállapítandó pontosság, vagyis a hányados utolsó jegyének helyiértéke 10^{c_2}. A megszabott pontosságú osztásra adott műveleti utasításunkból kiolvasható, hogy a megtartott osztandó utolsó jegyének 10^{α} helyiértékére

$$\alpha = b_1 + c_2 - 2,$$ [50]

a megtartott osztó utolsó jegyének 10^{β} helyiértékére pedig

$$\beta = b_1 - c_1 + c_2 - 1.$$ [51]

A hányados öröklött hibájának korlátja

$$(Ah_b.10^{b_2} + Bh_a.10^{a_2})B^{-2} = 10^{a_2+b_2}(h_a B.10^{-b_2} + h_b A.10^{-a_2})B^{-2}.$$

Két esetet különböztetünk meg a szerint, amint a tizedes pontokra

[50] Ez legegyszerűbben [34] alapján látható be, mert e szerint $\alpha - c_2 = (b_1 - 1) - 1$.

[51] U. i. a megszabott pontosságú művelet első osztásából kiolvasható, hogy $\alpha - \beta = c_1 - 1$.

nem nézve az osztandó kisebb vagy nagyobb az osztónál,[52] vagyis amint $A.10^{-a_2}$ kisebb vagy nagyobb mint $B.10^{-b_2}$.

Ha $A.10^{-a_2} < B.10^{-b_2}$, a megállapított korlát növelésével és $B \geqq 10^{b_1-1}$ figyelembe vételével

$$10^{a_2+b_2}(h_a+h_b)B^{-1}.10^{-b_2} \leqq (h_a+h_b).10^{a_2-b_1+1}$$

adódik korlátként. Észszerűnek mutatkozik tehát a műveletet $10^{a_2-b_1+1}$ pontossággal végezni, vagyis legyen $c_2 = a_2 - b_1 + 1$ és így

$$\alpha = a_2 - 1.$$

Tehát az osztandóhoz egy 0 hozzáirandó.

Ha $A.10^{-a_2} > B.10^{-b_2}$, a korlátnak az előzőhöz hasonló növelésével és $A/B < 10^{c_1}$ valamint $B \geqq 10^{b_1-1}$ figyelembe vételével a következő korlátot nyerjük:

$$10^{a_2+b_2}(h_a+h_b)AB^{-2}.10^{-a_2} < (h_a+h_b).10^{b_2}.10^{c_1}.10^{1-b_1} =$$

$$=(h_a+h_b).10^{b_2-b_1+c_1+1}.$$

Ha tehát a műveletet $10^{b_2-b_1+c_1+1}$ pontossággal végezzük, azaz $c_2 = b_2 - b_1 + c_1 + 1$, akkor

$$\beta = b_2.$$

Vagyis ilyenkor az osztót egészében megtartjuk.

Az elmondottakból kiolvasható[53] a következő:

Műveleti utasítás: Ha az osztandó kevesebb jegyű az osztónál az osztandó mellé írunk egy zérust s az osztóból ennek megfelelő[54] szeletet tartunk meg. Ha az osztandó annyi vagy több jegyű mint az osztó, az osztót egészében megtartjuk s az osztandóból ennek megfelelő[54] szeletet tartunk meg. Az így kijelölt osztandóval és osztóval a műveletet az 5. § utasítása szerint végezzük. Az adatok első jegyének helyiértékéből a hányados első jegye helyiértékére

---

[52] Az egyenlőség gyakorlatilag kizárt. Különben is érdektelen, mert akkor becsléseink bármelyike alkalmazható.

[53] Ha az osztandó és osztó jegyeinek száma megegyezik és tizedespontokra nem nézve az osztandó a kisebb, a levezetett s az utasításban szereplő eljárás alakilag ugyan nem egyezik, mégis azonos. A levezetettek szerint ilyenkor az osztandó mellé egy 0 irandó, tehát az 5. § osztási szabálya szerint az osztót egészében megtartjuk s éppen ezt írja elő mostani utasításunk.

[54] A megfelelés az 5. § osztási utasítása szerint értendő.

következtetünk s a tizedespontot ennek megfelelően helyezzük el.[55] Ha az osztandó és osztó hibamutatói h_a és h_b, az így számított hányados hibamutatója

$$h_a + h_b + 1.^{56\,57}$$

4. példa. Meghatározandó $\frac{\pi\sqrt{2}}{\pi+\sqrt{2}}$ az 5. § 1. példájának adataival. — Jobb hibabecslést akarva elérni, adatainkat $\pi = 3{\cdot}141590$ (5), $\sqrt{2}=1{\cdot}414210$ (5) alakban tekintjük. A szorzás művelete így változatlan s eredménye

(5+5+1=11) $s=4{\cdot}44287$ (11).

A nevezőt 4·55580 (1) alakban tekintve az osztás művelete is változatlan s eredménye

(11+1+1=13) $x=0{\cdot}97621$ (13).

A hibamutató, amint azt előre elvárhattuk, jóval nagyobb lett.

5. példa. Meghatározandó lg 7=0·8451 (0·5) és lg e=0·43429 (0·5) ismeretében 7 természetes logaritmusa.

$$0{\cdot}8\,4\,5\,1\,0 : 0{\cdot}4\,3\,\underline{4}\,\underline{2}\,\underline{9} = 1{\cdot}9\,4\,6$$

```
4 1 0 8 1
  1 9 9 5
    2 5 8
```

(0·5+0·5+1=2) ln 7=1·946 (2)

6. példa. A nátrium-színkép D-vonala egyik komponensének hullámszáma (a hullámhossz reciproka) 16956·16 (1) cm^{-1}, mennyi a hullámhossza? — A hullámszám reciprokát számítván az osztandó 1, ez hibátlan s így végtelen sokjegyűnek tekinthető. Tehát az osztót egészében megtartjuk s az 1 mellé megfelelő sok zérust írunk.

---

[55] A tizedespont elhelyezését, [34] utasítására gondolva, így is szabályozhatjuk: A hányadik jegy az osztó első jegyétől balra ill. jobbra annak tizese, annyiadik jegyet a megtartott osztandó utolsó jegyétől balra ill. jobbra fölébe helyezett ponttal jelöljük meg. A hányados tizedespontját úgy helyezzük el, hogy utolsó jegyének helyiértéke a ponttal megjelölt jegyével egyezzék.

[56] Miként a szorzásnál [48] alatt tettük, itt is megemlítjük, hogy óvatosabb kerekítéssel jobb, de bonyolultabb becsléshez juthattunk volna.

[57] Ha a hibamutatóban szereplő s a műveleti hibából eredő 1-et túlzottnak tartjuk, segíthetünk azzal, hogy az adatokat az utasítás alkalmazása előtt egy zérussal megtoldjuk s ekkor természetesen a hibamutatók is megtízszereződnek (v. ö. [49]).

1·0 0 0 0 0 0 0 : 1 6 9 5 6·1 6 = 0·0 0 0 0 5 8 9 7 5 6
1 5 2 1 9 2 0
1 6 5 4 2 7
1 2 8 2 1
9 5 2
1 0 4
(0+1+1=2) $\lambda = 589{\cdot}756\ (2)\ \mu\mu$

Félreértések elkerülése végett hangsúlyozzuk, hogy amikor *lehetőleg pontos* eredményt és jó hibabecslést akarunk látni, akkor az előző § előírásait célszerű alkalmazni. A most tárgyalt utasítások akkor tehetnek jó szolgálatot, amikor *lehetőleg gyorsan* megbízható jegyeket akarunk megállapítani.

Bár eljárásunk a hibának többnyire túlzottan magas korlátot szab, a kapott eredmény legtöbbször éppen a pontosan számított eredmény megbízható része (amint ezt a 4. példa is mutatja). Ezért eljárásunk jól használható mindannyiszor, amikor hibabecslést nem is végzünk, viszont elkerülni óhajtjuk felesleges jegyek írását.

7. §. Függvénytábla.

Foglalkozni kívánunk a táblából megállapított értékek hibájával. Gondolunk itt elsősorban logaritmus és trigonometrikus táblákra,[58] de megállapításaink általában mindenféle egyváltozós függvény táblájára érvényesek.

Gondolatmenetünk kiindulópontja az a már megállapított tény, hogy helyesen szerkesztett táblából kiolvasott érték hibakorlátja az utolsó jegy helyiértékének fele.

A függvénytábla az $y=f(x)$ függvény által egymáshoz rendelt x, y értékpárokat tartalmazza ügyesen tömörített elrendezésben. Az x független változó értékeit a táblázatot beosztó s a táblázat szélén elhelyezett *fejrovatban* találjuk, ezek a táblázat belsejének egy-egy helyét jelölik ki. Az y függő változó értékeit a táblázat belsejében, a *táblarovatban* és pedig a megfelelő x által kijelölt helyen találjuk.

A két rovat között nem tesz lényeges különbséget sem elhelye-

[58] A következőkben szereplő példákat az iskolai használatra készült négyjegyű Veress: *Logaritmus és kamatos-kamattáblák* alapján dolgoztuk ki.

zésük, sem hogy a fejrovat értékei rendesen egyenlőközű beosztást alkotnak. Ellenben lényeges a különbség közöttük a hibabecslés szempontjából. Ha pl. a logaritmus táblában 6·75-höz logaritmusként 0·4732 tartozik, tudjuk, hogy lg 6·75=0·4732 (0·5); ellenben arra a kérdésre, hogy 0·4732-höz numerusként mi tartozik, a hibát is megbecslő feleletet hosszasabb meggondolás nélkül nem tudunk adni.

Azt a műveletet, amellyel a független változó adott értékéhez a táblarovat megfelelő értékét megállapítjuk, *keresésnek* nevezzük. Az ellentett műveletet, amellyel a függő változó adott értékéből a fejrovat megfelelő értékére következtetünk, *visszakeresésnek* mondjuk.[59]

Ezekre a műveletekre akarjuk alkalmazni a 3. § gondolatait. Nem alapműveletekről lévén szó, itt már az öröklött és számolási hiba mellett képlethiba is fellép.

A képlethiba attól függ, hogy a táblából közvetlenül ki nem olvasható értékre milyen módszerrel következtetünk, vagyis milyen interpolációt alkalmazunk (pl. lineáris, parabolikus, stb.; vagy esetleg nem is interpolálunk, csak a legmegfelelőbb értéket olvassuk ki). Hogy milyen interpolációt célszerű alkalmazni, az elsősorban a használt táblától függ. Megfelelőnek olyan interpolációt tarthatunk, amelyiknél a képlethiba korlátja a számolási hiba korlátjának[60] csak egy töredéke s így a mellett elhanyagolható.[61] Ha ennél gyengébb interpolációt alkalmazunk, nem használjuk

[59] Ha pl. adott logaritmus numerusát állapítjuk meg s ehhez logaritmus táblát használunk, akkor «visszakeresünk»; ha pedig numerus táblával (antilogaritmus táblával) végezzük ezt, akkor «keresünk».

[60] Gondolatmenetünk alapja az a tény, hogy az interpoláció rendszámának növekedésekor a számolási hiba korlátja növekszik, a képlethibáé pedig csökken.

[61] Nem mondhatunk határozott ítéletet arra vonatkozólag, hogy hanyadrészt tarthatunk még elhanyagolhatónak. Gyakorlati szempontból nem túlzunk, ha ezt a határt egytizedrészben jelöljük meg. Vagyis a kisebb nagyságrendűt elhanyagoljuk. Nagyobb képlethiba a hibabecslésnél már külön is figyelembe veendő. — Nem támadható meg az a felfogás sem, hogy felesleges a képlethibát a számolási hiba alá szorítani (így pl. JORDAN [70] alatt i. m. 363 l.). Ha ezt a felfogást valljuk, a számolási hiba korlátjának megkétszerezésével vehető figyelembe a képlethiba.

ki táblánk teljesítőképességét; viszont hiába alkalmazunk a mondottnál finomabb interpolációt, ez a számítást gyakorlatilag pontosabbá nem teszi. Célszerű a tábla berendezése, ha minden helyen ugyanannyiadrendű interpolációt kíván meg.[62] Az ilyen berendezést a táblaszerkesztők az által valósítják meg, hogy a kritikus szakaszokon a fejrovat beosztását finomítják, vagy a táblarovat tizedesjegyeinek számát csökkentik, ill. az ellenkező természetű szakaszokon ezeknek az eljárásoknak a fordítottját alkalmazzák.[63] Minél alacsonyabbrendű interpolációra készül valamely tábla, annál terjedelmesebb s így nehézkesebben kezelhető és drágább; viszont magasabbrendű interpolációra szerkesztett táblázat több mellékszámítást és ebben való jártasságot kíván meg. Minthogy a lineáris interpoláció még igen egyszerű, a parabolikus pedig a táblával számolók többsége számára már nehézkes, a táblák többnyire lineáris interpolációra készülnek.[64] Jelen értekezésben, a hibabecslés alapjairól lévén szó, csak a lineáris interpolációval foglalkozunk.

A számolási hiba a tábláknál két forrásból ered. Egyrészt a táblarovat értékeinek pontatlanságából, másrészt az interpoláció diktálta változtatás pontatlan meghatározásából. Minthogy az előbbit — táblázatot nem akarva változtatni — csökkenteni nem tudjuk, nincs értelme annak, hogy az utóbbit további s érdektelen tizedesjegyek hozzáfűzésével csökkentsük. Vagyis az interpoláció adta

---

62 Vagy esetleg megjelöli azokat a szakaszokat, ahol magasabbrendű interpoláció kívánatos.

63 Iskolai használatra készült tábláknál ezek az eljárások pedagógiai szempontból kifogásolhatók.

64 A nálunk elterjedt táblák között egyedül a Horváth—Simon-féle *Négyjegyű logaritmustábla* nem kíván jórészt még lineáris interpolációt sem. Ha a fent mondottak szellemében gondolkozunk és e mellett osztjuk azt a véleményt is, hogy középiskolában a táblával végzett számítás s az interpoláció gyakorlásának egyik nem megvetendő célja az, hogy a függvényfogalomról alkotott kép kialakulását a tanulóban elősegítse, sajnálnunk kell az említett tábla erős elterjedtségét. Ugyanebből a pedagógiai szempontból helyeslendő, ha iskolai használatra készült tábla nem közli az interpoláció könnyítésére hivatott «arányos részek» összeállítását.

változtatást csak annyi jegyre határozzuk meg, ahány jegyű a táblarovat.[65]

Az öröklött hibával kapcsolatban elvként leszögeztük, hogy helyes, ha a műveleti hiba kisebb bár az öröklöttnél, de ahhoz képest nem elenyészően csekély. Ezt az elvet a táblákra akként alkalmazzuk, hogy az adatok pontosságának megfelelő táblát használunk.[66] Feleslegesen sokjegyű tábla alkalmazása a pontosságot gyakorlatilag nem növeli, csak oktalan munkát okoz.

A hiba vizsgálata vezet el annak a gyakorlati kérdésnek megoldásához, hogy a különféle számításoknál milyen táblát és milyen módszert alkalmazzunk. Ilyen szellemben előnyben kell részesítenünk a különleges célra készült táblákat (pl. politikai számtanban az e célra készülteket).[67] A módszerek összehasonlításánál a hiba kicsinyre szorításán kívül más szempontok is érvényesülhetnek: előnyös, ha a számítás rövid és egyszerű, ha nem kíván sokféle műveletet és nem jár sokszori műveletváltoztatással (átlapozással).

A táblával végzett számításoknál fellépő hibát elsőnek Gauss vizsgálta.[68] Nála a számolási hibának az interpolációból eredő része nem szerepel, mert azt vizsgálta, milyen pontosan lehet, s nem azt, hogy milyen pontosan szokás ill. észszerű számolni. Részletesebben foglalkozott a kérdéssel Lüroth.[69] Különösen a magasabbrendű interpolációk hibáit több differencia-számítási munka tárgyalja.[70]

---

[65] Különösen elítélendő, ha a mondott elv ellen a középiskolai oktatásban vagy éppen tankönyvben vétenek és pl. négyjegyű táblából ötjegyű logaritmust számítanak.

[66] Az esetek nagy többségében, így fizikai és technikai számításoknál, a négyjegyű táblák kielégítően pontosak. Ötnél többjegyű táblák alkalmazása többnyire csak a csillagászatban és politikai számtanban (v. ö.[31]) indokolt.

[67] Különösen megérdemlik a figyelem ráirányítását a ma egész Európában leginkább használt s magyar mellett német és francia kiadásban is megjelent Murai H.: Tíz tizedesjegyre számított kamatoskamat, betét, járadék és törlesztési táblák.

[68] L. c. [10].

[69] I. m. 81—99 l. (V. ö. [82]).

[70] Ezek közül első helyen említendő Ch. Jordan: Calculus of finite differences (1939), 355—421 l.

8. §. Keresés és visszakeresés.

Célunk olyan egyszerűen számítható hibakorlát megadása, amelyik lehetővé teszi, hogy táblával végzett hosszabb számítások esetében is könnyűszerrel megállapíthassuk az eredmény hibakorlátját.

A fejrovat szomszédos x_1, x_2 értékeinek közét az interpoláció végzésekor n részre felosztva gondoljuk. Egy-egy ilyen rész rendesen valamiféle egység (pl. egész, tizezred, fok, perc,...) s ezt ξ-vel jelöljük. A tábla szerkezete s számításunk természete szabja meg n értékét,

$$\text{többnyire } n = 10.$$

A táblarovat utolsó jegyének helyiértékét η-val jelöljük. A táblarovatnak az interpoláláskor szereplő, szomszédos y_1, y_2 értékei egymástól η-nak d-szeresében különbözzenek, vagyis az elterjedt szóhasználat szerint

$$d \text{ a táblabeli különbség.}$$

Az adat és eredmény hibamutatóit ξ-re ill. η-ra vonatkoztatjuk.

Az (x_1, x_2) közbe eső x érték különbözzék x_1-től ξ-nek a-szorosában; az (y_1, y_2) közbe eső y érték különbözzék y_1-től η-nak b-szeresében. Tehát a és b a szereplő értékek eltérése a rovatértékektől.

A lineáris interpoláció alapja a görbének húrjával való helyettesítése, vagyis az

$$a : n = b : d$$

arányosság érvényének a görbére való kiterjesztése.

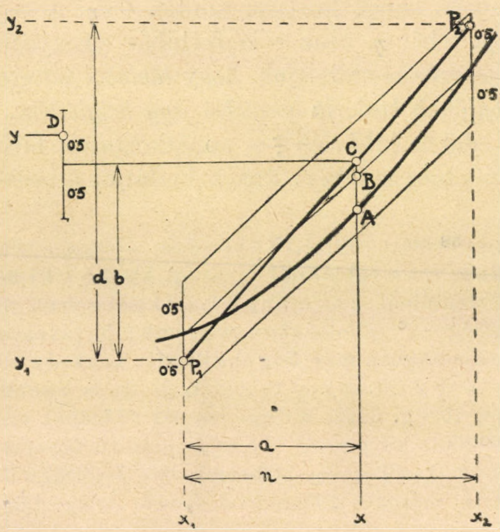
Keresés. *Műveleti utasítás.* Megállapítjuk az x adatnak megfelelő $a : n$ arányt s a d táblabeli különbséget. Egészekig kiszámítjuk

$$b = \frac{a}{n} d$$

értékét és ez szolgáltatja a keresett y értéket.

Példa jelöléseink világosabbá tételére: Meghatározandó lg 2·718. — Sorban: $x_1=2{\cdot}71$, $x_2=2{\cdot}72$, $y_1=0{\cdot}4330$, $y_2=0{\cdot}4346$; $n=10$, $\xi=0{\cdot}001$, $a=8$, $a:n=0{\cdot}8$; $\eta=0{\cdot}0001$, $d=16$, $b=0{\cdot}8.\ 16=13\ (0{\cdot}5)$, $y=0{\cdot}4343$.

A hibák különböző fajtáit legjobban a viszonyok geometriai ábrázolása révén tekinthetjük át. Az 1. ábra vízszintes és függőleges távolságai mellett ξ ill. η egységülvételével adódó mérőszámok állanak. Az $y=f(x)$ görbe (vastagon kihúzott) ívét húrjával pótoljuk. A táblarovat adatainak hibakorlátja $0{\cdot}5\,\eta$ s így ezek oly P_1, P_2 pontokat szolgáltatnak, amelyek a húrt körülvevő s η függőleges szélességű parallelogrammára esnek. Amikor tehát az interpolációt végrehajtjuk, a görbe A ill. a húr B pontja helyett a P_1P_2 távolság C pontját akarjuk meghatározni és b pontatlan kiszámítása miatt egy más D pont ordinátáját határozzuk meg.



1. ábra.

A képlethibát az AB távolság méri, mert ha a táblázat s a számolás pontos volna, csak ez lépne fel. Ez a hiba LAGRANGE interpolációs formulája szerint[71]

$$\frac{1}{2} f''(\bar{x})\,(x-x_1)\,(x-x_2),$$

ahol $x_1 < \bar{x} < x_2$. Korlátja tehát $f''(x) < K$ esetében

$$\frac{1}{8} K\,(x_2-x_1)^2.$$

A gyakorlatban használt tábláknál ez a korlát a számolási hibára

[71] Feltéve t. i., hogy $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható.

megállapítandó η korlátnak többnyire csak csekély töredéke.[72] Ezért gyakorlatilag helyesen járunk el, ha a következőkben figyelmen kívül hagyjuk. Ez az elhanyagolás általában indokolt, ha a táblarovat második differenciái (tizedespontra nem nézve), átlagban 1-et nem haladják meg.[73]

A tábla pontatlanságából eredő számolási hibát a BC távolság mutatja, ez az ábra tanúsága szerint legfeljebb $0 \cdot 5\eta$.[74] A pontatlan interpolálásból eredő számolási hiba C és D ordinátakülönbségében mutatkozik, ennek korlátja szintén $0 \cdot 5\eta$. A teljes számolási hiba korlátja tehát η, azaz a képlethibát elhanyagolva s pontos adatot feltételezve mondhatjuk, hogy *táblából interpolálással keresett érték hibájának korlátja az utolsó jegy helyiértéke.*

Ha az x adat is hibás és ξ-re vonatkoztatott hibamutatója h_x, akkor öröklött hiba is fellép. Ennek korlátját a másodrendű kicsi-

---

[72] Így pl. az [58] alatt említett VERESS-féle táblánál a két korlát aránya a $\lg x$, 10^x, $\sin x$, $\cos x$ tábláknál egyaránt kisebb 0·07-nél. A szögfüggvények logaritmusainál ez az arány 0·1-nél kisebb, ha a végtelenné válás helyétől legalább 12° távolságban vagyunk; 5° távolságban ez arány 0·5-ig, 1°30' távolságban már 5-ig emelkedik. Legkedvezőtlenebb a korlátok aránya a $\operatorname{tg} x$ (ill. $\operatorname{ctg} x$) táblánál, de itt is kisebb 0·1-nél 0°-tól 56°-ig, 0·5-nél 70°-ig, 5-nél 80°-ig. Iskolai táblánál az aránynak ily leromlása a [63] alatt kimondott elv szükségszerű következménye.

[73] Ezt a következőképpen láthatjuk be: Jelöljük a $d=d_1$ első differencia mellett a második differenciát d_2-vel. Átlagértékekre gondolva

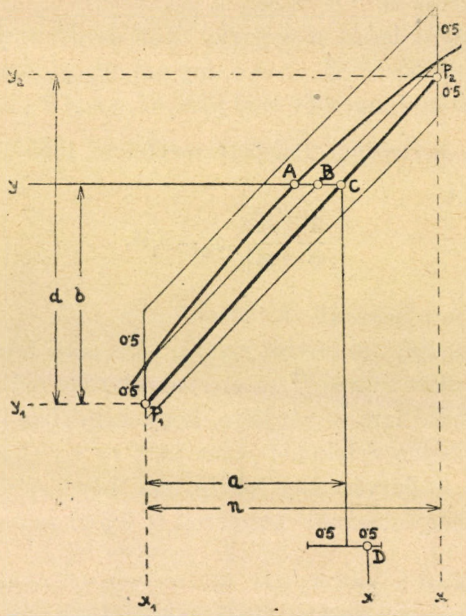
$$|y'|=\frac{d_1\eta}{n\xi}, \quad |y''|=\frac{d_2\eta}{n^2\xi^2}.$$

Tehát $\frac{1}{8}|y''|(n\xi)^2<0 \cdot 1\eta$ alapján $d_2<0 \cdot 8$ adódik s e helyett valamivel durvábban $d_2<1$ mondható. — Ha a képlethibát a számolási hiba korlátjának megkétszerezésével vesszük figyelembe (v. ö.[61]), d_2 átlaga 8-ig emelkedhetik (ilyenkor a műveleti hiba mutatója 2). A lineáris interpoláció gyakorlati alkalmazhatósága határának kb. ezt tartja EMDE: Tafeln elementarer Funktionen (1940), 163—165 l.

[74] Becslésünk alapja az, hogy a P_1P_2 távolság az említett parallelogrammán belül halad. Ha a táblarovat adataival képzett táblabeli különbség helyett a valódi különbség legjobb közelítő értékét használjuk, ez már nem áll s a hiba η-ig emelkedhetik. A magasabbrendű interpolációknál is előnyösebb a tábla adataival képzett különbségek használata (l. MEHMKE i. m. 992 l.). JORDAN [70] mindazáltal a valódi különbség közelítő értékét helyezi előtérbe.

nyek elhanyagolásával, vagyis a görbét húrjával pótolva határozzuk meg. Ha a húr iránytangense m, a keresett korlát $mh_x\xi$; minthogy pedig $|m| \leqq \frac{(d+1)\eta}{n\xi}$ [75] az öröklött hiba korlátja

$$\frac{d+1}{n} h_x \eta.$$



2. ábra.

A kereséssel megállapított y értéknek η-ra, utolsó jegye helyiértékére vonatkoztatott hibamutatója tehát

$$\boldsymbol{h_y = \frac{d+1}{n} h_x + 1}.^{[76]} \qquad \textit{(K)}$$

[75] Ha az x adat a $h_x\xi$ ingadozás révén sem hagyhatja el az (x_1, x_2) közt, a húr helyett a P_1P_2 távolságot is használhatjuk s így $d+1$ helyébe d léphet (v. ö.[79]). Olyan szakaszokon, ahol d kicsiny, 1 körül jár, túlzottnak tarthatjuk d-nek a biztonság kedvéért 1-el való növelését. Ilyen szakaszokon a tábla még lineáris interpolációt sem kíván, tehát a 7. § elvei szerint készült táblánál ilyen szakasz nem fordulhat elő.

[76] Ha a keresésnél nem kellett interpolálnunk, 1 helyett 0·5 is írható. Nem célszerű azonban a becslést egyöntetűsége rovására finomítani.

Visszakeresés. *Műveleti utasítás:* Megállapítjuk az y adatnak megfelelő $b:d$ arányt és a meghatározandó utolsó jegy ξ helyiértékének megfelelő n számot. Egészekig kiszámítjuk

$$a = \frac{b}{d} n$$

értékét és ez adja az x eredményt.

A hibabecslést ismét geometriai úton szemléltetjük. A 2. ábra jelölésmódja az előzőével azonos, így azt magyaráznunk nem kell. Ha a húr iránytangensét m-el jelöljük, az AB távolság mutatta képlethiba a keresésnél fellépett megfelelő hibának $\frac{1}{m}$-szerese. Korlátja tehát

$$\frac{1}{8} \frac{K}{|m|} (x_2 - x_1)^2.$$

A gyakorlatban használt tábláknál s n szokott megválasztása mellett ez a korlát többnyire jóval a számolási hibára megállapítandó korlát alatt marad,[77] ezért gyakorlatilag indokolt figyelmen kívül hagynunk. Arra a kérdésre, hogy általában egy táblánál n milyen legnagyobb értékénél jogos még ez az elhanyagolás, legegyszerűbben és durván úgy felelhetünk, hogy az első és második differenciák hányadosának átlagértékét 0·5-el szorozzuk.[78]

---

[77] Álljanak itt a VERESS-féle táblára vonatkozó adatok. Itt a lg x és 10^x táblánál visszakeresésre nincs szükség. Ha a trigonometrikus táblákánál a visszakeresést percekig végezzük ($n = 10$), akkor a szereplő korlátok aránya az egyes tábláknál a következő: a sinus-cosinus táblánál még 0·02-t is csak alig haladhatja meg; a tangens (ill. cotangens) táblánál 0°-tól 83°-ig kisebb 0·1-nél, 88°-ig 0·5-nél; a szögfüggvények logaritmusainál a végtelenné válás helyétől 4°-nál nagyobb távolságban 0·1-nél, 1°-nál nagyobb távolságban pedig 0·5-nél kisebb.

[78] Szigorúbban ([73] jelöléseit használva s egytizedrészt tartva elhanyagolhatónak): az elhanyagolás minden n-re jogos, ha $d_2 \leqq 0{\cdot}4$; ha pedig $d_2 > 0{\cdot}4$, akkor $n < \frac{0{\cdot}4\, d_1}{d_2 - 0{\cdot}4}$ esetében. Ugyanis az $\frac{1}{8} \left| \frac{y''}{y'} \right| (x_2 - x_1)^2$ korlát a számolási hibára $m = y'$ közelítéssel adódó $\frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{|y'|} + \xi \right)$ korlátnak tizedrészét sem éri el, ha $\frac{1}{8} \frac{d_2}{d_1} n\xi < 0{\cdot}05 \left(\frac{n\xi}{d_1} + \xi \right)$, s ebből a mondottak kiolvashatók. Ha a képlethibát a számolási hiba korlátjának megkétszerezésével kívánjuk figyelembe venni, akkor a szabályban 0·4

A tábla pontatlanságából eredő s ábránkban a BC távolság által mutatott számolási hiba legfeljebb $\frac{0{\cdot}5\eta}{|m|}$, vagyis $|m| \geqq \frac{(d-1)\eta}{n}$ felhasználásával $\frac{n}{d-1}\,0{\cdot}5\,\xi$.[79] adódik korlátnak. A pontatlan interpolálásból eredő, s a C és D pontok abszcisszakülönbségében mutatkozó számolási hiba legfeljebb $0{\cdot}5\xi$. A teljes számolási hiba korlátja tehát

$$\left(\frac{n}{d-1}\,0{\cdot}5 + 0{\cdot}5\right)\xi.^{80}$$

Ha az y adat is hibás és η-ra vonatkoztatott hibamutatója h_y, akkor az öröklött hiba korlátja a másodrendű kicsinyek elhanyagolásával, a keresésnél megállapítottnak mintájára $\frac{h_y}{|m|}\eta$. Az öröklött hiba korlátja tehát m fenti becslésének felhasználásával

$$\frac{n}{d-1}\,h_y\xi.$$

A visszakeresett x értéknek utolsó jegye ξ helyiértékére vonatkoztatott hibamutatója ezek szerint

$$h_x = \frac{n}{d-1}(h_y + 0{\cdot}5) + 0{\cdot}5.^{81} \qquad (V)$$

---

helyett 4 veendő. Ha alkalmazzuk azt az észszerű megszorítást, hogy a számolási hiba korlátjának első része lényegesen ne haladja meg a második részt, vagyis n a d-nél lehetőleg kisebb legyen, a képlethiba pedig az így megengedett legnagyobb számolási hibát ne haladja meg, akkor a lineáris interpolációval végzett visszakeresés gyakorlati alkalmazhatóságának a következő határt szabhatjuk: Ha átlagban $d_2 < 8$, akkor n nagyságrendileg d_1-et nem haladhatja meg; ellenkező esetben n számára $8\frac{d_1}{d_2}$ a határ. [73] alapján szabályunk első részét kell hangsúlyoznunk. Ha n az adott határokat nem lépi túl, a műveleti hiba mutatója 2. — Természetesen n számára a mondott határok között a fejrovat beosztásának megfelelő kerek értéket választunk.

[79] A számolási hiba e részénél d—1 nem pótolható d-vel, bár az öröklött hiba becslését illetőleg itt is áll [75] megjegyzése.

[80] E formulánknak csak akkor van értelme, ha $d > 1$. Ha $d = 0$ vagy 1, akkor a tábla még lineáris interpolációt sem kíván s a hiba nagyságára a szomszédos értékekből nem is következtethetünk. Az ilyen szakaszon a fejrovat ritkításával sokszor *pontosabb* eredményhez s megfelelő hibabecsléshez juthatunk. Újabb érv ez a mellett, hogy a táblák legalább lineáris interpolációra készüljenek (v. ö. [64]).

[81] Ha interpolálásra nincs szükség, az utóbbi 0·5 elmaradhat (v. ö. [76]).

A (K) és (V) formulák összevetése formailag is érdekes. Tárgyilag ez az összevetés arra tanít, hogy az ellenfüggvény külön tabellálása s így a visszakeresés elkerülése akkor eredményez kisebb hibát, ha a kívánt finomságú interpoláció esetében az eredeti függvény táblájánál $n > d$ volna.[82] Ha ez a feltétel nem is teljesül, más szempontok az ellenfüggvény tabellálása mellett szólnak.[83]

Átkeresés. Így kívánjuk nevezni azt a ritkábban használt műveletet, mellyel két közös fejrovatú tábla esetében táblarovataik egymásnak megfelelő értékeit állapítjuk meg. Ilyenkor ugyanis felesleges először visszakeresést s azután keresést végezni, a táblákat segédváltozós függvény táblájának fogva fel, közvetlenül az egyik változóról a másikra következtethetünk. Ilyen műveletet végzünk, amikor pl. $\sin x$ ismeretében a táblából közvetlenül $\cos x$-et számítjuk, s elvileg általában akkor, amikor a fejrovat is csak közelítő értékeket tartalmaz.[84]

Jelöléseink a következők: az $x(t)$, $y(t)$ függvények tábláinak szereplő táblabeli különbségei d_x, d_y, táblarovataik hibamutatói t_x, t_y (ezek értéke általában 0·5); az adott x és a keresett y értékek eltérései a rovatértékektől a, b, adott és keresett hibamutatóik h_x, h_y. A lineáris interpolálás alapja az

$$a : d_x = b : d_y$$

arányosság.

[82] LÜROTH (i. m. 84—86 l.) a keresés hibájánál BREMIKER nyomán már figyelembe veszi a pontatlan interpolálásból eredő számolási hibát, azonban a visszakeresésnél ezt elmulasztja. Így jut arra a téves következtetésre, hogy a szokott berendezésű logaritmustáblák esetében a hibát szinte mindig csökkenthetjük numerus tábla használatával.

[83] Bár külön ellenfüggvény táblák a terjedelmet növelik és a kétféle tábla összecserélése újabb tévedés forrása lehet, egyre terjed alkalmazásuk, mert így a keresés és visszakeresés kétféleségétől megszabadulunk, csak az egyszerűbb mellékszámítással járó (d helyett a kerek n-nel való osztást igénylő) keresés műveletét végezzük, a magasabbrendű interpoláció alkalmazását mindkét változó meghatározásánál lehetővé tesszük s a pontosságot is sokszor növeljük.

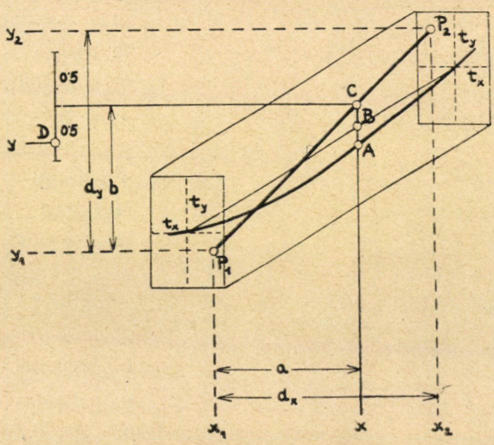
[84] Miként a visszakeresést elkerülhetjük az ellenfüggvény tabellálásával, úgy átkeresésre sincs szükség megfelelő külön tábla használata esetén. Ilyen tábla pl. a GAUSS-féle logaritmusoké, amelyik a $\lg x$-ről $\lg (x+1)$-re való átkeresést teszi mellőzhetővé.

Műveleti utasítás: Meghatározzuk az x adatnak megfelelő $a : d_x$ arányt, a d_y különbséget s egészekig kiszámítjuk a

$$b = \frac{a}{d_x} d_y$$

értéket, ez adja az y eredményt.

A hibabecslést a 3. ábra szemlélteti az előző ábrák módszerével. A képlethibát ismét elhanyagolhatónak tekintjük. Ez az elhanyagolás jogos, ha az $x(t)$, $y(t)$ tábláknál jogos volt.



3. ábra.

A számolási és öröklött hiba megbecslése ábránkból ugyanúgy kiolvasható, miként az előző műveleteknél tettük. Az y eredmény hibamutatója ilyen meggondolással

$$\boldsymbol{h_y = \frac{d_y+2t_y}{d_x-2t_x}(h_x+t_x)+(t_y+0{\cdot}5).} \qquad (\boldsymbol{VK})$$

Formulánk általánosítása a (V) és (K) formuláknak; azok ebből a $d_x=n$, $d_y=d$, $t_x=0$, $t_y=0{\cdot}5$ helyettesítések közvetlen ill. x és y szerepcseréje utáni elvégzéséből adódnak. (VK)-ból kiolvasható, hogy *az átkeresés pontosabb eredményhez vezet, mint egymásutáni visszakeresés és keresés.*[85]

[85] Ha a visszakeresésnél interpolálásból eredő számolási hiba nincs, akkor a kétféle eljárás lényegében azonos s így egyformán pontos is. Ennek alapján (VK) levezethető (V)-ből és (K)-ból.

1. példa. Egy háromszögben $a=75{\cdot}83$, $b=62{\cdot}19$, $\gamma=47°34'$; meghatározandó c. — A számítást a VERESS-féle táblával végezzük. Kiindulási adatainkat hibátlanoknak tekintjük. Kétféle eljárást alkalmazunk.

1*a*) Cosinus-tétellel:

$(0{\cdot}6.0+1=1)$	$\lg a = 1{\cdot}8799$ (1)
	$\lg a^2 = 3{\cdot}7598$ (2)
$(1{\cdot}4.2+1=3{\cdot}8)$	$a^2=5751$ (3·8)
	$\lg b = 1{\cdot}7937$ (1)
	$\lg b^2 = 3{\cdot}5874$ (2)
$(1.2+1=3)$	$b^2=3868$ (3)
	$\lg 2 = 0{\cdot}3010$ (0·5)
	$\lg \cos\gamma = 9{\cdot}8291$ (1) -10
	$\lg 2ab \cos\gamma = 3{\cdot}8037$ (3·5)
$(1{\cdot}6.3{\cdot}5+1=6{\cdot}6)$	$2ab\cos\gamma = 6363$ (6·6)
$(3{\cdot}8+3+6{\cdot}6<14)$	$c^2=3256$ (14)
$(1{\cdot}4.14+1<21)$	$\lg c^2 = 3{\cdot}5127$ (21)
	$\lg c = 1{\cdot}7564$ (11)
$(1{\cdot}4.11+1<17)$	$c=57{\cdot}07$ (17)

1*b*) Tangens-tétellel:

	$a+b=138{\cdot}02$
	$a-b=13{\cdot}64$
	$\frac{\alpha+\beta}{2}=66°13'$
	$\lg(a+b) = 2{\cdot}1400$ (1)
	$\lg(a-b) = 1{\cdot}1348$ (1)
	$\lg \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = 10{\cdot}3558$ (1) -10
	$\lg \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 9{\cdot}3506$ (3) -10
$\left(\frac{10}{58}\cdot 3{\cdot}5+0{\cdot}5\approx 1{\cdot}1\right)$	$\frac{\alpha-\beta}{2}=12°38'$ (1·1)
	$\alpha=78°51'$ (1·1)
$(0{\cdot}3.1{\cdot}1+1<1{\cdot}4)$	$\lg\sin\alpha = 9{\cdot}9917$ (1·4) -10
	$\lg\sin\gamma = 9{\cdot}8681$ (1) -10
	$\lg a = 1{\cdot}8799$ (1)
	$\lg c = 1{\cdot}7563$ (3·4)
$(1{\cdot}4.3{\cdot}4+1<6)$	$c=57{\cdot}06$ (6)

Példánk tanúsága szerint a tangens-tétel ilyen számításnál nemcsak előnyösebb, mert a szögeket is szolgáltatja, hanem pontosabb eredményt is ad.

2. Példa. Meghatározandó a

$$3x^3 + 2x - 10 = 0$$

egyenlet pozitív gyöke. — Trinom egyenletünket a szögfüggvények logaritmusainak táblájával oldjuk meg. Minthogy

$$0{\cdot}3x^3 + 0{\cdot}2x = 1,$$

olyan α szöget keresünk, melyre

$$\sin^2\alpha = 0{\cdot}3x^3, \qquad \cos^2\alpha = 0{\cdot}2x,$$

azaz

$$\sin^2\alpha \cos^{-6}\alpha = 37{\cdot}5,$$

$$f(\alpha) = \lg \sin\alpha - 3 \lg \cos\alpha = \frac{1}{2} \lg 37{\cdot}5 = 0{\cdot}7870 \ (0{\cdot}25).$$

$f(\alpha)$-nak táblából számított következő értékei fogják közre adatunkat:

α	$\lg \cos \alpha$	$f(\alpha)$
58°40′	9·7160 (0·5) — 10	0·7835 (2)
58°50′	9·7139 (0·5) — 10	0·7906 (2)

Átkereséssel $\lg \cos \alpha$ értékét számítjuk. A jelen esetben $d_x=71$, $d_y=21$, $a=35$, $b=\frac{35}{71}\cdot 21=10$ (0·5); $t_x=2$, $t_y=0{\cdot}5$, $h_x=0{\cdot}25$ és így

$$\left(\frac{22}{67}\cdot 2{\cdot}25+1<1{\cdot}8\right) \qquad \lg \cos \alpha = 9{\cdot}7150 \ (1{\cdot}8) \ -10$$

$$2 \lg \cos \alpha = 0{\cdot}4300 \ (3{\cdot}6) \ -1$$

$$\lg 0{\cdot}2 = 0{\cdot}3010 \ (0{\cdot}5) \ -1$$

$$\lg x = 0{\cdot}1290 \ (4{\cdot}1)$$

$$(0{\cdot}4.4{\cdot}1+1<3) \qquad x = 1{\cdot}346 \ (3)$$

Sokféle hiba halmozódásakor, mint már említettük, igen nagy a valószínűsége annak, hogy a hibák egymást jórészt lerontják. Ezért a becslésünk adta hibakorlát a valódi hibánál többnyire jóval nagyobb.[86] Ez a tény természetes velejárója annak, hogy *hibakorlátot* kerestünk. Más lenne a helyzet, ha a valószínűségszámítás segítségével a *hiba átlagos értékére* következtetnénk. Az ilyen hibabecslés külön értekezés tárgyát alkothatná.

Hajós György.

---

[86] A tényleges hiba mutatója fentebbi példáinknál közelítőleg rendre a következő: 1*a*) 2·7; 1*b*) 1·7; 2) 0·4.

GRUNDZÜGE DER FEHLERABSCHÄTZUNG.

Nach Besprechung der Notwendigkeit, Vorteile und Prinzipien der Fehlerabschätzung wird das Ziel gesteckt, die wohlbekannten Elemente der Fehlerabschätzung systematisch darzustellen und sie an mancher Stelle zu ergänzen. Die Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie werden nicht gestreift. Im Sinne der Approximationsmathematik wird nur praktischen Zielen gedient.

Einleitende Kapitel behandeln die *Fehlerschranke*, ihre Eigenschaften und die durch sie bedingten elementaren Operationen (Abrundung der Fehlerschranke, Abschnittbildung und Vernachlässigung), sowie die verschiedenen Fehlerquellen und die Beziehungen der aus ihnen entspringenden Fehler. Ohne Berücksichtigung des «Irrfehlers» kommen nur die aus der Ungenauigkeit der Daten, der Vorschrift und des Rechnens stammenden Erbfehler, Formelfehler und Rechenfehler in Betracht.

Nach kurzer Übersicht der wie üblich durchgeführten *vier Spezies* und ihrer Fehler, werden ihre abgekürzten Durchführungen ausführlich untersucht. Bei den angeführten Operationsvorschriften ergibt sich in jedem praktisch vorkommenden Fall, dass der Fehler die Einheit der letzten Ziffer nicht überschreiten kann. Es werden auch Vorschriften zur natürlichen Abkürzung gegeben, d. h. die ohne jede vorläufige Rechenarbeit möglichst eben den zuverlässigen Abschnitt des Ergebnisses liefern, wobei der Fehler zwar manchmal grob, aber besonders einfach abschätzbar ist.

Im Lichte der besprochenen allgemeinen Prinzipien werden die *Funktionentafeln* und die mit ihrer Hilfe durchgeführten Operationen eingehend untersucht. Die in Betracht gezogenen Operationen sind das Suchen der abhängigen und unabhängigen Variablen, sowie das Bestimmen einander zugehöriger Werte einer in Parameterdarstellung tabellierten Funktion. Die für die Fehlerschranken angegebenen Formeln ermöglichen das Abschätzen des Fehlers auch bei längeren Rechnungen ohne besondere Mühe.

G. Hajós.

FÜGGVÉNYEK MEGKÖZELÍTÉSE FOURIER-SORUK SZÁMTANI KÖZEPEIVEL.

Bevezetés.

A 2π szerint periodikus folytonos $f(x)$ függvény Fourier-sora legyen

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx+b_k \sin kx).$$

Ismeretes, hogy ennek ú. n. Fejér-féle közepeivel, a

$$\sigma_{1n}(f\,;\,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(a_k \cos kx+b_k \sin kx)$$

trigonometrikus polinomokkal, $f(x)$ tetszésszerinti kívánt pontossággal egyenletesen megközelíthető.

Ha $f(x)$ differenciálhányadosa korlátos,[1] akkor S. BERNSTEIN egy tétele szerint[2] ez a megközelítés $\frac{\log n}{n}$-rendű, pontosabban

$$|f(x)-\sigma_{1n}(f\,;\,x)|\leqq \max|f'|\cdot\left(\frac{\log 2n}{n}+\frac{1}{\pi n}\right).$$

Itt a $\max|f'|$ szorzója még kisebbíthető. Mi e dolgozatban meg

---

[1] Ha a következőkben valamely $f(x)$ függvény r-edik differenciálhányadosának korlátosságáról beszélünk, mindig feltesszük, hogy $f^{(r)}(x)$ legalább is egy zéró mértékű halmaz kivételével mindenütt létezik és korlátos, továbbá, hogy $f(x)$ az $f^{(r)}(x)$-nek r-edik iterált integrálfüggvénye (azaz, hogy $f(x), f'(x), f''(x),\ldots,f^{(r-1)}(x)$ teljesen folytonosak).

[2] S. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné, *Mem. Acad. Belg.* (2) **4** (1912), 1—104. o., különösen a 88—89. o.

fogjuk határozni a pontos állandót s egyben azokat a függvényeket, amelyekre a megközelítés a legkedvezőtlenebb. Nyilván szorítkozhatunk az $|f'| \leqq 1$ esetre.

I. tétel. *Mindazon $f(x)$ függvények közül, amelyekre $|f'(x)| \leqq 1$, a $\sigma_{1n}(f;x)$ Fejér-féle középpel, bármely n-re, azok közelíthetők meg a legkevésbbé, amelyek differenciálhányadosa félperiodusonként felváltva $+1$ és -1. A fellépő legnagyobb eltérés pontos értéke*

$$\varrho_{1n}^{(1)} = \frac{4}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{2\nu+1} + \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^2} \qquad \left(N = \left[\frac{n-1}{2}\right]\right),$$

tehát

$$\varrho_{1n}^{(1)} = \frac{2}{\pi} \frac{\log(n+1)}{n+1} + \frac{R_n}{n},$$

ahol

$$\frac{2}{\pi} \frac{n}{n+2} < R_n < \frac{6}{\pi}.$$

Ugyanezekre a függvényekre lesz a megközelítés a legkedvezőtlenebb akkor is, ha a $\sigma_{1n}(f;x)$ közepek helyett tetszésszerinti pozitív egész δ-rendű $\sigma_{\delta n}(f;x)$ Cesàro-közepekkel közelítünk meg. A fellépő legnagyobb eltérésnek értékét $\varrho_{\delta n}^{(1)}$-nel jelölve,

$$\varrho_{1n}^{(1)} < \varrho_{2n}^{(1)} < \varrho_{3n}^{(1)} < \cdots \quad \text{és} \quad \varrho_{\delta+1,n}^{(1)} - \varrho_{\delta n}^{(1)} < \frac{2}{\pi} \frac{\log(n+1)}{n+\delta+1} + \frac{4}{\pi(n+\delta+1)};$$

a tekintett függvényhalmazra tehát a magasabbrendű Cesàro-közepekkel való megközelítés általában kedvezőtlenebb.

Az n-edik δ-rendű Cesàro-közép értelmezése különben, mint ismeretes, a következő:

$$\sigma_{\delta n}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-k+\delta}{n-k}}{\binom{n+\delta}{n}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ami (egész δ-ra) így is írható:

$$\sigma_{\delta n}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+2}\right) \cdots$$

$$\cdots \left(1 - \frac{k}{n+\delta}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Ha az első helyett valamelyik magasabbrendű differenciálhányados korlátosságát tesszük fel, $\frac{1}{n}$-rendű megközelítést kapunk. Kimutatjuk ugyanis a következőket:

II. tétel. *Azok közül az $f(x)$ függvények közül, amelyekre $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ (r valamely egynél nagyobb egész szám), a $\sigma_{\delta n}(f; x)$ középpel (bármely δ-ra és n-re) a legkevésbbé azok közelíthetők meg, amelyekre $f^{(r)}(x)$ félperiodusonként felváltva $+1$ és -1. A fellépő legnagyobb eltérés a Fejér-féle közepek esetén ($\delta=1$):*

$$\varrho_{1n}^{(r)} = \frac{K^{(r)}}{n+1} + \frac{R_n^{(r)}}{(n+1)^{r+1}}, \text{ illetőleg } \varrho_{1n}^{(r)} = \frac{K^{(r)}}{n+1} - \frac{S_n^{(r)}}{(n+1)^r},$$

a szerint, amint r páros vagy páratlan; itt

$$K^{(r)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^r},$$

$$|R_n^{(r)}| < \frac{4}{\pi} \frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}, \quad 0 < S_n^{(r)} < \frac{2}{\pi(r-1)}.^{3}$$

$$\textit{Továbbá } \varrho_{1n}^{(r)} < \varrho_{2n}^{(r)} < \varrho_{3n}^{(r)} < \cdots; \ \varrho_{\delta+1,n}^{(r)} - \varrho_{\delta n}^{(r)} < \frac{K^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Alexits nemrég azt a kérdést vetette fel, mennyire közelíthető meg az $f(x)$ függvény a $\sigma_{\delta n}(f; x)$ közepekkel, ha az $f(x)$ Fourier-sorának *konjugált* sora:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

egy olyan $\bar{f}(x)$ függvényt állít elő, amelynek differenciálhányadosa korlátos.[4] Ha $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)}$ jelöli a megközelítés mértékét az $|\bar{f}'(x)| \leq 1$

---

[3] Könnyű látni, hogy

$$K^{(2)} < K^{(4)} < K^{(6)} < \cdots < \frac{4}{\pi} < \cdots < K^{(7)} < K^{(5)} < K^{(3)}, \ \lim_{r \to \infty} K^{(r)} = \frac{4}{\pi}.$$

[4] Ismeretes, hogy $\bar{f}(x)$ a következőképpen függ össze $f(x)$-szel:

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \lim_{h \to 0} \int_h^{\pi} [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{cotg} \frac{t}{2} \, dt.$$

feltétellel jellemzett függvények halmazára, akkor ALEXITS eredménye szerint[5] $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)} \leq \frac{C_\delta}{n}$; C_δ pontos értéke nem ismeretes, csak annyi biztos, hogy $C_1 < 4$. Mi be fogjuk bizonyítani a következőket:

III. tétel. *Mindazon $f(x)$ függvények közül, amelyekre $|\bar{f}'(x)| \leq 1$, a $\sigma_{\delta n}(f; x)$ középpel (ahol $\delta \geq 3$, n tetszőleges) azok közelíthetők meg a legkevésbbé, amelyekre $\bar{f}'(x)$ félperiodusonként felváltva $+1$ és -1. A fellépő legnagyobb eltérést $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)}$-nel jelölve,*

$$\bar{\varrho}_{3n}^{(1)} < \frac{3}{n+1}$$

és

$$\bar{\varrho}_{3n}^{(1)} < \bar{\varrho}_{4n}^{(1)} < \bar{\varrho}_{5n}^{(1)} < \cdots; \quad \bar{\varrho}_{\delta+1, n}^{(1)} - \bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)} < \frac{1}{n+\delta+1}.$$

A $\bar{\varrho}_{1n}^{(1)}$ és $\bar{\varrho}_{2n}^{(1)}$ pontos értékét nem tudjuk meghatározni, sem azokat a függvényeket, amelyre a legrosszabb a megközelítés, csupán azt fogjuk megmutatni, hogy $\bar{\varrho}_{2n}^{(1)} < \bar{\varrho}_{3n}^{(1)} + \frac{1}{n+3}$; $\bar{\varrho}_{1n}^{(1)} < \bar{\varrho}_{3n}^{(1)} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}$; a $\bar{\varrho}_{1n}^{(1)}$-re így kapott becslés azonban rosszabb az ALEXITS által adott $\bar{\varrho}_{1n}^{(1)} < \frac{4}{n}$ becslésnél.

Akár a Bernstein-féle, ez a probléma is átvihető magasabbrendű differenciálhányadosok esetére is. Eredményünk:

IV. tétel. *Mindazon $f(x)$ függvények közül, amelyekre $|\bar{f}^{(r)}(x)| \leq 1$ (r valamely egynél nagyobb egész szám), a $\sigma_{\delta n}(f; x)$ középpel (bármely egész δ-ra és n-re) azok közelíthetők meg a legkevésbbé, amelyekre $\bar{f}^{(r)}(x)$ félperiodusonként felváltva $+1$ és -1. A fellépő legnagyobb eltérést $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(r)}$-nel jelölve,*

$$\bar{\varrho}_{1n}^{(r)} = \frac{\bar{K}^{(r)}}{n+1} + \frac{\bar{R}_n^{(r)}}{(n+1)^{r+1}}, \text{ illetőleg } \bar{\varrho}_{1n}^{(r)} = \frac{\bar{K}^{(r)}}{n+1} - \frac{\bar{S}_n^{(r)}}{(n+1)^r},$$

[5] ALEXITS GYÖRGY, A Fourier-sor Cesàro-közepeivel való approximáció nagyságrendjéről, *Mat. Fiz. Lapok*, **48** (1941), 410—421. o.

a szerint, amint r páratlan vagy páros; itt

$$\overline{K}^{(r)}=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^r},\ \left|\overline{R}_n^{(r)}\right|<\frac{4}{\pi}\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}},\ 0<S_n^{(r)}<\frac{2}{\pi(r-1)}.^{6}$$

Újra $\bar{\varrho}_{1n}^{(r)}<\bar{\varrho}_{2n}^{(r)}<\bar{\varrho}_{3n}^{(r)}<\cdots;\ \bar{\varrho}_{\delta+1,n}^{(r)}-\bar{\varrho}_{\delta n}^{(r)}<\frac{\overline{K}^{(r)}}{n+\delta+1}.$

Az I., II. és IV. tétel Hölder-féle közepekre is átvihető.[6a]

1. §.

Legyen

$$\varphi_r(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^r},\quad \psi_r(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^r}\quad (r=1,2,\ldots).$$

Ha $r>1$, ezek a sorok egyenletesen konvergálnak és így $\varphi_r(x)$ és $\psi_r(x)$ folytonos mindenütt és $\psi_r(0)=\psi_r(\pi)=0$. A $(0,2\pi)$ közön továbbá $\varphi_1(x)=-\log\left(2\sin\frac{x}{2}\right)$ és $\psi_1(x)=\frac{\pi-x}{2}\cdot$ A $\varphi_r(x)$-et ill. $\psi_r(x)$-et származtató sor egyben a függvény FOURIER-sora ($r=1$ esetben is).

FEJÉR egy már régen tett észrevétele szerint $\psi_1(x)-\sigma_{1n}(\psi_1;x)$ a $(0,\pi)$ közön pozitív, a $(\pi,2\pi)$ közön negatív. Ez következik

---

[6] Könnyű látni, hogy

$$\overline{K}^{(2)}>\overline{K}^{(4)}>\overline{K}^{(6)}>\cdots>\frac{4}{\pi}>\cdots>\overline{K}^{(7)}>\overline{K}^{(5)}>\overline{K}^{(3)},\ \lim_{r\to\infty}\overline{K}^{(r)}=\frac{4}{\pi}\cdot$$

A $\overline{K}^{(r)}$ állandók értéke a differenciaszámításból ismert Euler-féle E_r, illetőleg C_r számokkal függ össze; $\overline{K}^{(2)}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{K}^{(3)}=\frac{\pi^2}{8}$, $\overline{K}^{(4)}=\frac{\pi^3}{24}$ stb.

[6a] Mint utólag értesültünk, a $\varrho_{1n}^{(r)}$ mennyiségekre nemrég S. M. NIKOLSKY orosz matematikus is nyert, a miénktől különböző meggondolásokkal, aszimptotikus becsléseket, l. a következő dolgozatait: Sur l'allure asymptotique du reste dans l'approximation au moyen des sommes de Fejér des fonctions vérifiant la condition de Lipschitz, *Bull. Acad. Sci. URSS* **4** (1940), 501—508. o. (oroszul, francia kivonattal), továbbá: Estimations of the remainder of Fejér's sum for periodical functions possessing a bounded derivative, *Comptes Rendus Acad. Sci. URSS.* **31** (1941), 210—214. o. Kimutatja, hogy $\varrho_{1n}^{(1)}=\frac{2}{\pi}\frac{\log n}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)$ és $\varrho_{1n}^{(r)}=\frac{K^{(r)}}{n+1}+$ $+O\left(\frac{\log n}{n^r}\right)$ $(r\geqq 2)$, de az exakt értékeket és az extremális függvényeket nem határozza meg.

abból, hogy a π helyen ez a különbségfüggvény 0, a $(0, 2\pi)$ közön pedig a differenciálhányadosa

$$-\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\cos kx=-\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^{2}<0.$$

Minthogy a magasabbrendű Cesàro-közepek az elsőrendűek pozitív súlyokkal vett számtani közepeiként fejezhetők ki, azért tetszésszerinti pozitív egész δ-ra és n-re is $\psi_1(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_1; x)$ előjele megegyezik a $\sin x$-ével.

Általában bármely páratlan r-re $\psi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_r; x)$ előjele megegyezik a $\sin x$-ével. Ez r-ről $r+2$-re így látható be: $\psi_{r+2}(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_{r+2}; x)$ a $(0, \pi)$-n felülről, a $(\pi, 2\pi)$-n alulról konvex, mert második differenciálhányadosa $-\big(\psi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_r; x)\big)$. Minthogy továbbá a $0, \pi$ és 2π helyeken 0-vá válik, a $(0, \pi)$-n szükségképpen maga is pozitív, a $(\pi, 2\pi)$-n pedig negatív.

Páros r-re $\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r; x)$ a $(0, \pi)$-n monoton fogy, hiszen differenciálhányadosa $-\big(\psi_{r-1}(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_{r-1}; x)\big)<0$. Ha $a_{r\delta n}$-nel jelöljük a $\pi/2$ pontban felvett értéket, akkor tehát $\varphi_r(x)-$ $-\sigma_{\delta n}(\varphi_r; x)-a_{r\delta n}$ a $(0, \pi/2)$-n pozitív, a $(\pi/2, \pi)$-n negatív. Páros és periodikus függvényről lévén szó, következik ebből, hogy előjele mindenhol megegyezik a $\cos x$-ével.

A $\psi_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}$ függvény a $(0, \pi)$-n pozitív és felülről konvex. A konvexitás abból következik, hogy $\psi_2''(x)=\varphi_1'(x)=$ $=\left(-\log 2\sin\frac{x}{2}\right)'=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}<0$, a pozitivitás pedig a konvexitásból és abból, hogy a függvény a végpontokban 0. Fejér egy tétele szerint[7] bármely a $(0, \pi)$-n pozitív és felülről konvex függvény szinuszsorának Cesàro-közepei ott a függvény alatt maradnak. Ennélfogva $\psi_2(x)-\sigma_{\delta n}(\psi_2; x)$ előjele mindig egyezik a $\sin x$-ével.

Hasonló tény áll bármely páros indexű $\psi_r(x)$-re is, amit r-ről $r+2$-re való következtetéssel láthatunk ismét be.

---

[7] Fejér Lipót, A Fourier-féle sor és a hatványsor számtani közepeinek néhány új tulajdonságáról, *Mat. Fiz. Lapok,* **41** (1934), 1—16. o.

Egynél nagyobb páratlan indexű r-re $\varphi_r(x)-\sigma_{\delta n}(\varphi_r; x)$ a $(0, \pi)$-n monoton fogy, hiszen differenciálhányadosa $-\big(\psi_{r-1}(x)-$ $-\sigma_{\delta n}(\psi_{r-1}; x)\big) < 0$. Ha a $\pi/2$ helyen felvett értéket újra $a_{r\delta n}$-nel jelöljük, $\psi_r(x) - \sigma_{\delta n}(\varphi_r; x) - a_{r\delta n}$ előjele mindenütt egyezik a $\cos x$-ével.

Összefoglalva:

Ha

$$\Phi_{r\delta n}(x) = \varphi_r(x) - \sigma_{\delta n}(\varphi_r; x) - a_{r\delta n},$$

ahol

$$a_{r\delta n} = \varphi_r\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sigma_{\delta n}\left(\varphi_r; \frac{\pi}{2}\right),$$

és

$$\Psi_{r\delta n}(x) = \psi_r(x) - \sigma_{\delta n}(\psi_r; x),$$

akkor

$$\operatorname{sgn} \Phi_{r\delta n}(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sin x, & \text{ha} \quad r = 2, 4, 6, \ldots, \\ \operatorname{sgn} \cos x, & \text{ha} \quad r = 3, 5, 7, \ldots, \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} \Psi_{r\delta n}(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \sin x, & \text{ha} \quad r = 1, 3, 5, \ldots, \\ \operatorname{sgn} \cos x, & \text{ha} \quad r = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

bármely pozitív egész δ-ra és n-re.

2. §.

A megközelítések vizsgálatában nyilván elég azokat az $f(x)$ függvényeket tekintenünk, amelyekre $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$.

Legyen $\mathfrak{K}^{(r)}(r=1, 2, \ldots)$ azoknak a periodikus $f(x)$ függvényeknek az osztálya, amelyekre $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ és $|f^{(r)}(x)| \leqq 1$. Keressük a

$$\varrho_{\delta n}^{(r)} = \max_{f \in \mathfrak{K}^{(r)}} \max_x |f(x) - \sigma_{\delta n}(f; x)|$$

mennyiségeket s azokat a függvényeket, amelyekre ez a maximum eléretik.

Ha

$$f(x) \in \mathfrak{K}^{(r)} \quad \text{és} \quad f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

akkor páros r-re

$$(-1)^{\frac{r}{2}} f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

páratlan r-re

$$(-1)^{\frac{r+1}{2}} f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^r (a_k \sin kx - b_k \cos kx).$$

A Parseval-tétel alapján könnyen igazolhatók a következő összefüggések:

$$f(x) - \sigma_{\delta n}(f; x) = \frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x+y)\, \Phi_{r\delta n}(y)\, dy, \text{ ha } r \text{ páros}, \quad (1)$$

$$f(x) - \sigma_{\delta n}(f; x) = \frac{(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x+y)\, \Psi_{r\delta n}(y)\, dy, \text{ ha } r \text{ páratlan}. \quad (2)$$

Jelöljük $f_r^\star(x)$-szel azt a $\mathfrak{K}^{(r)}$ osztályba tartozó függvényt, amelyre

$$\left(f_r^\star(x)\right)^{(r)} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}} \operatorname{sgn} \cos x, & \text{ha } r \text{ páros}, \\ (-1)^{\frac{r+1}{2}} \operatorname{sgn} \sin x, & \text{ha } r \text{ páratlan}. \end{cases}$$

Minthogy

$$\operatorname{sgn} \cos x \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\cos(2\nu+1)x}{2\nu+1},$$

$$\operatorname{sgn} \sin x \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)x}{2\nu+1},$$

azért

$$f_r^\star(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu(r+1)} \frac{\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

a) *Legyen $f(x) \in \mathfrak{K}^{(r)}$, ahol r páratlan*; (2)-ből, tekintetbe véve még, hogy $\operatorname{sgn} \Psi_{r\delta n}(x) = \operatorname{sgn} \sin x = (-1)^{\frac{r+1}{2}} (f_r^\star(x))^{(r)}$, kapjuk:

$$|f(x) - \sigma_{\delta n}(f; x)| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x+y)\, \Psi_{r\delta n}(y)\, dy \right| \leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(r)}(x+y)|\, |\Psi_{r\delta n}(y)|\, dy \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\Psi_{r\delta n}(y)|\, dy = \frac{(-1)^{\frac{r+1}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} [f_r^\star(y)]^{(r)}\, \Psi_{r\delta n}(y)\, dy =$$

$$= f_r^\star(0) - \sigma_{\delta n}(f_r^\star; 0).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy valamely $x=x_0$ pontban csak az $f(x)=\pm f_r^\star(x-x_0)$ függvényekre lesz itt végig egyenlőség.

Ennélfogva[8]

$$\varrho_{\delta n}^{(r)} = f_r^\star(0) - \sigma_{\delta n}(f_r^\star;\ 0) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N}\left[1-\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2\nu+1}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\right]\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}} +$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Speciálisan a Fejér-féle közepekre $r=1$ esetében

$$\varrho_{1n}^{(1)} = \frac{4}{\pi(n+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\frac{1}{2\nu+1} + \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{1}{(2\nu+1)^2},$$

tehát[9]

$$\varrho_{1n}^{(1)} < \frac{4}{\pi(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}\int_2^{2N+2}\frac{dx}{x}\right)+\frac{2}{\pi}\int_{2N+2}^{\infty}\frac{dx}{x^2} < \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+1}+\frac{6}{\pi n}.$$

és

$$\varrho_{1n}^{(1)} > \frac{2}{\pi(n+1)}\int_1^{2N+3}\frac{dx}{x}+\frac{2}{\pi}\int_{2N+3}^{\infty}\frac{dx}{x^2} > \frac{2}{\pi}\,\frac{\log(n+1)}{n+1}+\frac{2}{\pi(n+2)}.$$

Továbbá

$$\varrho_{\delta+1,\,n}^{(1)} - \varrho_{\delta n}^{(1)} =$$

$$= \frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2\nu+1}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\frac{1}{2\nu+1},$$

---

[8] A következőkben N-nel fogjuk jelölni az $\frac{n-1}{2}$-ben foglalt legnagyobb egész számot.

[9] A következőkben ismételten fogjuk alkalmazni a következő becsléseket: Ha $p(x)$ az $(a,\ a+2h)$ közön pozitív és monoton fogy, akkor

$$\sum_{\nu=0}^{h-1} p(a+2\nu) \geqq \frac{1}{2}\int_a^{a+2h} p(x)\,dx;$$

ha még alulról konvex is, akkor

$$\sum_{\nu=0}^{h-1} p(a+2\nu+1) \leqq \frac{1}{2}\int_a^{a+2h} p(x)\,dx;$$

egyenlőség csak bizonyos lépcsős, illetőleg csak bizonyos törtvonal-függvényekre lép fel.

tehát

$$0 < \varrho^{(1)}_{\delta+1,n} - \varrho^{(1)}_{\delta n} < \frac{4}{\pi(n+\delta+1)} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{2\nu+1} < \frac{2}{\pi} \frac{\log(n+1)}{n+\delta+1} + $$
$$+ \frac{4}{\pi(n+\delta+1)}.$$

Ezzel az I. tételt bebizonyítottuk.

Ha most r egynél nagyobb páratlan szám, akkor

$$\varrho^{(r)}_{1n} = \frac{4}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{N} \frac{1}{(2\nu+1)^r} + \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^{r+1}} =$$
$$= \frac{K^{(r)}}{n+1} - \frac{S^{(r)}_n}{(n+1)^r},$$

ahol

$$K^{(r)} = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^r}$$

és

$$S^{(r)}_n = \frac{4}{\pi}(n+1)^{r-1} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{2\nu-n}{(2\nu+1)^{r+1}},$$

tehát

$$0 < S^{(r)}_n < \frac{2}{\pi}(n+1)^{r-1} \int_{2N+3}^{\infty} \frac{dx}{x^r} < \frac{2}{\pi(r-1)}.$$

Továbbá

$$\varrho^{(r)}_{\delta+1,n} - \varrho^{(r)}_{\delta n} =$$
$$= \frac{4}{\pi(n+\delta+1)} \sum_{\nu=0}^{N} \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2\nu+1}{n+2}\right) \cdots \left(1 - \frac{2\nu+1}{n+\delta}\right) \frac{1}{(2\nu+1)^r},$$

tehát

$$0 < \varrho^{(r)}_{\delta+1,n} - \varrho^{(r)}_{\delta n} < \frac{K^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Ezzel a II. tételt páratlan r-ekre bebizonyítottuk.

b) *Legyen* $f(x) \in \mathfrak{K}^{(r)}$, *ahol* r *páros*; (1)-ből, tekintetbe véve még, hogy $\operatorname{sgn} \Phi_{r\delta n}(x) = \operatorname{sgn} \cos x = (-1)^{\frac{r+1}{2}} (f^{\star}_r(x))^{(r)}$, kapjuk a fentihez hasonló számítással, hogy

$$|f(x) - \sigma_{\delta n}(f; x)| \leq f^{\star}_r(0) - \sigma_{\delta n}(f^{\star}_r; 0).$$

Egyenlőség itt valamely $x = x_0$ pontban újra csak az $f(x) = \pm f_r^{\star}(x-x_0)$ függvényekre lesz. Ennélfogva

$$\varrho_{\delta n}^{(r)} = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N}\left[1-\left(\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2\nu+1}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\right]\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}}+$$
$$+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Speciálisan a Fejér-féle közepekre

$$\varrho_{1n}^{(r)} = \frac{4}{\pi(n+1)}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^r}+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^{r+1}} =$$
$$= \frac{K^{(r)}}{n+1}+\frac{R_n^{(r)}}{(n+1)^{r+1}},$$

ahol

$$K^{(r)} = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^r}$$

és

$$R_n^{(r)} = -\frac{4}{\pi}(n+1)^r\sum_{\nu=N+1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{2\nu-n}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

Minthogy a $p(s) = \frac{4}{\pi}(n+1)^r\frac{s-n}{(s+1)^{r+1}}$ függvény az $s \geqq n$ félegyenesen pozitív, az $s_0 = n + \frac{n+1}{r}$ pontig nő, azon túl fogy, azért az $R_n^{(r)} = \sum\limits_{\nu=N+1}(-1)^{\nu+1}p(2\nu)$ összegnek a $\nu \leqq \frac{s_0}{2}$ indexekre kiterjesztett része s a megmaradó rész is kisebb abszolút értékű, mint $p(s_0)$; a két rész nyilván ellenkező előjelű lévén, egyben $|R_n^{(r)}| < p(s_0) = \frac{4}{\pi}\frac{r^r}{(r+1)^{r+1}}$.

Továbbá kapjuk:

$$\varrho_{\delta+1,n}^{(r)} - \varrho_{\delta n}^{(r)} =$$
$$= \frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2\nu+1}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)^r},$$

tehát

$$0 < \varrho_{\delta+1,n}^{(r)} - \varrho_{\delta n}^{(r)} < \frac{K^{(r)}}{n+\delta+1}.$$

Ezzel a II. tételt páros r-ekre is bebizonyítottuk.

3. §.

Legyen $\bar{\mathfrak{K}}^{(r)}(r=1, 2,\ldots)$ azoknak az

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

függvényeknek az osztálya, amelyekre

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\sin kx-b_k\cos kx)$$

valamely a $\mathfrak{K}^{(r)}$ osztályba tartozó $\bar{f}(x)$ függvény Fourier-sora. Keressük a

$$\bar{\varrho}_{\delta n}^{(r)}=\max_{f\in\bar{\mathfrak{K}}^{(r)}}\max_{x}|f(x)-\sigma_{\delta n}(f;x)|$$

mennyiségeket és azokat a függvényeket, amelyekre ez a maximum eléretik.

Ha $f(x)\in\bar{\mathfrak{K}}^{(r)}$, akkor páros r-re

$$(-1)^{\frac{r}{2}}f^{(r)}(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}k^r(a_k\sin kx-b_k\cos kx),$$

páratlan r-re

$$(-1)^{\frac{r-1}{2}}f^{(r)}(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}k^r(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

A Parseval-tétel alapján belátható, hogy

$$f(x)-\sigma_{\delta n}(f;x)=\frac{(-1)^{\frac{r}{2}}}{\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}^{(r)}(x+y)\Psi_{r\delta n}(y)\,dy,\ \textit{ha } r \textit{ páros,}\tag{3}$$

$$f(x)-\sigma_{\delta n}(f;x)=\frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}}}{\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}^{(r)}(x+y)\Phi_{r\delta n}(y)\,dy,\ \textit{ha } r \textit{ páratlan.}\tag{4}$$

Jelöljük $g_r^{\star}(x)$-szel azt a $\bar{\mathfrak{K}}^{(r)}$ osztályba tartozó függvényt, amelyre

$$\overline{g_r^{\star}(x)}^{(r)}=\begin{cases}(-1)^{\frac{r}{2}}\ \operatorname{sgn}\sin x, & \text{ha } r \text{ páros,}\\(-1)^{\frac{r-1}{2}}\ \operatorname{sgn}\cos x, & \text{ha } r \text{ páratlan;}\end{cases}$$

azaz a

$$\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu r}\frac{\cos(2\nu+1)x}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

függvényt.

A (3) és (4) összefüggésekből kiindulva és tekintetbe véve a Φ és Ψ függvények előjelére az 1. §-ban kapott eredményeket, az eddigiekhez hasonló okoskodással nyerjük, hogy ha $r=2, 3, 4,\dots$, δ és n tetszésszerinti, akkor

$$|f(x)-\sigma_{\delta n}(f;\, x)| \leq g_r^\star(0)-\sigma_{\delta n}(g_r^\star;\, 0),$$

és egyenlőség egy $x=x_0$ pontban csak az $f(x)=\pm g_r^\star(x-x_0)$ függvényekre lehet. Ennélfogva, ha $r=2, 3,\dots$:

$$\bar{\varrho}_{\delta n}^{(r)}=g_r^\star(0)-\sigma_{\delta n}(g_r^\star;\, 0)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{N}\left[1-\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2\nu+1}{n+2}\right)\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\right]\frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}}+$$

$$+\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu r}}{(2\nu+1)^{r+1}}.$$

A további becslések a $\varrho_{\delta n}^{(r)}$-ekre végzettekhez mindenben hasonlóak, csupán a páros és páratlan r-ek szerepe cserélődik fel. Ezzel a IV. tételt bebizonyítottuk.

4. §.

Hátra van még $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)}$ vizsgálata. A (4) összefüggés $r=1$ esetére is érvényes. Mielőtt ennek alapján továbbhaladhatnánk, meg kell vizsgálnunk a $\Phi_{1\delta n}$ függvény előjelviszonyait.

Minthogy $(0, 2\pi)$-n $\varphi_1(y)=-\log\left(2\sin\frac{y}{2}\right)$, azért

$$\Phi_{11n}(y)=\left(\varphi_1(y)-\sigma_{1n}(y)\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{y}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\sin ky=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{y}{2}+\frac{(n+1)\sin y-\sin(n+1)y}{4(n+1)\sin^2\frac{y}{2}}$$

$$=-\frac{1}{n+1}\frac{\sin(n+1)y}{4\sin^2\frac{y}{2}}.\text{[10]}$$

[10] A $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\sin ky$ összegképletét, amelyből ennek az összegnek a $(0, \pi)$-n való pozitivitása is kiderül, LUKÁCS F. nyerte először, v. ö. P. TURÁN, Über die arithmetischen Mittel der Fourierreihe, *Journal London Math. Soc.* **10** (1935), 277—280.

A Cesàro-közepek közti

$$\binom{n+\delta+1}{n}\sigma_{\delta+1,n}=\sum_{m=0}^{n}\binom{m+\delta}{m}\sigma_{\delta m}$$

összefüggés alapján innen

$$\binom{n+2}{2}\Phi'_{12n}(y)=\sum_{m=0}^{n}\binom{m+1}{1}\Phi'_{11m}(y)=-\frac{\sum\limits_{m=0}^{n}\sin(m+1)y}{4\sin^2\frac{y}{2}},$$

$$\binom{n+3}{3}\Phi'_{13n}(y)=\sum_{m=0}^{n}\binom{m+2}{2}\Phi'_{12n}(y)=$$

$$=-\frac{\sum\limits_{m=0}^{n}(n+1-m)\sin(m+1)y}{4\sin^2\frac{y}{2}},$$

tehát $\Phi'_{13n}(y)$ a $(0,\pi)$-n negatív.[11] Természetesen minden 3-nál nagyobb δ-ra is $\Phi'_{1\delta n}(y)$ a $(0,\pi)$-n negatív lesz. Minthogy $\Phi_{1\delta n}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, azért $\operatorname{sgn}\Phi_{1\delta n}(y)=\operatorname{sgn}\cos y$ minden y-ra, ha $\delta\geqq 3$.

A további meggondolás az előbbi §-okban végzettekhez hasonló. Ha $f(x)\in\bar{\mathfrak{K}}^{(1)}$, akkor $|f(x)-\sigma_{\delta n}(f;x)|\leqq g_1^{\star}(0)-\sigma_{\delta n}(g_1^{\star};0)$ $(\delta\geqq 3)$; egyenlőség az $x=x_0$ pontban csak az $f(x)=\pm g_1^{\star}(x-x_0)$ esetben.

Tehát, ha $\delta\geqq 3$, $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)}$-re hasonló kifejezés érvényes, mint az egynél nagyobb páratlan r indexű $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(r)}$-ekre. Minthogy bármely δ-ra, mint könnyen belátható,

$$\sigma_{\delta n}(g_1^{\star};0)-\sigma_{\delta+1,n}(g_1^{*};0)=$$

$$=\frac{4}{\pi(n+\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{N}\left(1-\frac{2\nu+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2\nu+1}{n+2}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{2\nu+1}{n+\delta}\right)\frac{(-1)^{\nu}}{2\nu+1}=\frac{1}{n+\delta+1}\sigma_{\delta n}(\operatorname{sgn}\cos;0)\begin{cases}>0\\ <\dfrac{1}{n+\delta+1}\end{cases},$$

azért

$$0<\bar{\varrho}_{\delta+1,n}^{(1)}-\bar{\varrho}_{\delta n}^{(1)}<\frac{1}{n+\delta+1}\qquad(\text{ha }\delta\geqq 3);$$

---

[11] V. ö. [10] alatt megjegyzettekkel.

továbbá

$$\bar{\varrho}_{3n}^{(1)} = g_1^\star(0) - \sigma_{3n}(g_1^\star;\, 0) = \big(g_1^\star(0) - \sigma_{1n}(g_1^\star;\, 0)\big) + \\ + (\sigma_{1n} - \sigma_{2n}) + (\sigma_{2n} - \sigma_{3n}) <$$

$$< \left(\frac{4}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} - \frac{4}{\pi(n+1)} \sum_{\nu=N+1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2\nu-n}{(2\nu+1)^2}\right) + \\ + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3},$$

tehát

$$\bar{\varrho}_{3n}^{(1)} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\pi(n+1)^2} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} < \frac{3}{n+1}.$$

(Itt a második sor összegét hasonló módon becsültük meg, mint az $R_n^{(r)}$-et a 2. §-ban.) Ezzel a III. tételt is bebizonyítottuk.

A $\Phi_{1\delta n}(y)$ előjele 3-nál kisebb δ-ra nem egyezik a cos x-ével. Ezért a $\delta=1$ és $\delta=2$ esetekben már nem a $g_1^\star(x)$ az extrémális függvény. A $\bar{\varrho}_{1n}^{(1)}$ és $\bar{\varrho}_{2n}^{(1)}$ értékére a következőképpen nyerhetünk a $\bar{\varrho}_{3n}^{(1)}$ segítségével becslést:

$$\sigma_{2n}(f;\, x) - \sigma_{3n}(f;\, x) = \sum_{k=1}^{n} \left[\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+2}\right) - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+2}\right)\left(1 - \frac{k}{n+3}\right)\right](a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{n+3} \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+2}\right) k(a_k \cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{n+3}\, \sigma_{2n}(\bar{f}';\, x)$$

és ugyanígy

$$\sigma_{1n}(f;\, x) - \sigma_{2n}(f;\, x) = \frac{1}{n+2}\, \sigma_{1n}(\bar{f}';\, x).$$

Mármost, ha $|\bar{f}'(x)| \leqq 1$, akkor $|\sigma_{\delta n}(\bar{f}';\, x)| \leqq 1$; ennélfogva ekkor az

$$f(x) - \sigma_{1n}(f;\, x) = f(x) - \sigma_{3n}(f;\, x) + \\ + \sigma_{3n}(f;\, x) - \sigma_{2n}(f;\, x) + \sigma_{2n}(f;\, x) - \sigma_{1n}(f;\, x)$$

felbontás alapján

$$\bar{\varrho}_{1n}^{(1)} < \varrho_{3n}^{(1)} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+2}$$

és ugyanígy

$$\bar{\varrho}_{2n}^{(1)} < \bar{\varrho}_{3n}^{(1)} + \frac{1}{n+3}.$$

Ezzel a bevezetésben foglalt minden állításunkat bebizonyítottuk.

Szőkefalvi Nagy Béla.

APPROXIMATION DER FUNKTIONEN DURCH DIE ARITHMETISCHEN MITTEL IHRER FOURIERSCHEN REIHEN.

Man bezeichne mit $\sigma_{\delta n}(f; x)$ das Cesàrosche Mittel von der Ordnung δ und vom Index n der Fourierschen Reihe von $f(x)$.

Es wird bewiesen, dass unter allen periodischen Funktionen $f(x)$ von der Periode 2π, für die $|f^{(r)}(x)| \leqq 1$, diejenigen am ungünstigsten durch $\sigma_{\delta n}(f; x)$ approximiert werden können, für die $f^{(r)}(x)$ auf Halbperioden abwechselnd gleich $+1$ und -1 ist. Damit gelingt es die grösste Abweichung $\varrho_{\delta n}^{(r)}$ für alle positiven ganzen r, δ und n zu bestimmen. Es ergibt sich insbesondere, dass $\varrho_{1n}^{(r)} < \varrho_{2n}^{(r)} < \varrho_{3n}^{(r)} < \cdots$ ist. Die Approximation mit Mitteln höherer Ordnung wird also im allgemeinen ungünstiger.

Unter allen Funktionen $f(x)$, deren konjugierte Fouriersche Reihe eine Funktion $\bar{f}(x)$ mit $|\bar{f}^{(r)}| \leqq 1$ darstellt, werden diejenigen am ungünstigstigsten durch $\sigma_{\delta n}(f; x)$ approximiert, für welche $\bar{f}^{(r)}(x)$ auf Halbperioden abwechselnd gleich $+1$ und -1 ist; im Falle $r=1$ gilt dies allerdings erst für $\delta \geqq 3$. Die grössten Abweichungen $\bar{\varrho}_{\delta n}^{(r)}$ werden zahlenmässig bestimmt. Es ergibt sich wieder, dass die Approximationen höherer Ordnung im allgemeinen ungünstiger sind.

Béla v. Sz. Nagy.

Fényképnyomat, Divald K. Budapest és Eperjes.

GALILEI ÉS AZ ÚJKORI TUDOMÁNYOS GONDOLKODÁS KIBONTAKOZÁSA.

GALILEO GALILEI HALÁLÁNAK 300-ik ÉVFORDULÓJA ALKALMÁBÓL.

I.

Ama mély átalakulásnak, mely a középkor világfelfogását az újkoréba átvitte és melynek egyik legfontosabb momentuma a modern tudományos gondolkodás kialakulása, egyik legjellegzetesebb reprezentánsa és tényezője *Galileo Galilei*, kinek sorsa és szerepe éppen ezen átalakulás szimbolumává vált.

Galilei korában a tudomány újraéledése már jó ideje folyamatban volt, már ismert volt Copernicus heliocentrikus rendszere, már megindult a mechanika újraépítése, a szkolasztikus tudomány kritikájával számos helyen találkozunk, de senki oly meggyőző erővel és írói készséggel, közérthető nyelven, az új tények és mély belátások tömegének felsorakoztatásával nem vitte a köztudatba, hogy egy módszereiben és alapfelfogásaiban új világ van kialakulóban. Mert nemcsak egyes felfedezésekről és tények megállapításáról volt szó és arról, hogy ezek hogyan illeszthetők be az uralkodó rendszer keretei közé, hanem hogy evidenciába helyeztessék, hogy ezek az új tények és tapasztalatok a régi keretek határait széjjelfeszítik. Egy lezárt rendszerrel szemben, mely csak a részletekben való kibővítést engedte meg, az új tudomány töredéket nyujt. Tudja és kifejezi, hogy tudásunk kezdetén állunk, a tudás csak távoli cél. Az általános, legmagasabb elvek helyett, megvetett köznapi jelenségekkel, mint a szabad esés és hajítás, foglalkozik és azt vallja, hogy: «egy egyszerű igazság felismerése fontosabb, mint a legmagasabb dolgok részletes tárgyalása a nélkül, hogy az igazságot elérjük». Reámutatott arra, hogy Aristoteles és más tekintélyek helyett közvetlenül a természethez forduljunk és azt egy nyitott könyvnek tekintsük. Az előítéletmentes megfigyelés és módszeres kísérletezés egyrészt, a matematikai módszer másrészt azok a segédeszközök, melyek képessé tesznek e könyv olvasására. Mások is felismerték az empirikus módszerek és a matematika fontosságát GALILEI kortársai közül, de egyiküknél sem volt e két szempont olyan kiegyensúlyozott harmóniában. Így VERULAMI BACON általánosságban kifejtette ugyan a megfigyelés primátusának jelentőségét, de maga új igazságot nem talált és kora nagy felfedezéseit kellően nem értékelte. Ezért HUME DÁVID, a nagy filozófus és történetíró, egy igen elterjedt véleménnyel szemben a tudományos gondolkodás megújítását nem honfitársára, BACONre hanem GALILEIre vezeti vissza, ki közvetlenül hatott HUYGHENSre és NEWTONra és az új természetfelfogás többi újraalkotóira. Másrészt DESCARTES, ki GALILEInél nagyobb matematikus volt és a természettudományok matematikai módszere tekintetében is előrehaladottabb álláspontot képviselt, túlkorán hajlandó volt egy-egy provizórikus feltevést végső alapnak kijelenteni és nélkülözi GALILEI közvetlenségét és elfogulatlanságát.

GALILEI felfogásai ma oly mértékben átmentek a köztudatba, hogy szinte triviálisaknak tűnnek fel. De nem voltak triviálisak GALILEI korában és hogy ezt belássuk, nem lesz felesleges egy pillantást vetni a középkor világfelfogására.

Sokféle és meglehetős heterogén tényezők azok, melyek a középkor világát alakították. Elsőnek a kereszténységet emelem ki, mely már abban az alakjában hatott, midőn a klasszikus görög-római kultúra számos elemét asszimilálta, nemcsak az újplatonikus és később aristotelesi filozófiát, hanem a római imperium gondolatát is. Másrészt kevés tradícióval bíró, de nagytehetségű, minden benyomásra fogékony, nagy vitalitású, gazdag és naiv fantáziával bíró népek hatoltak be egy régi kultúrterületre és avval kölcsönhatásban sajátos életformákat, költészetet és művészetet hoztak létre. E naiv és közvetlen erők ott találják a hatalmas klasszikus kultúra és kereszténység hagyatékát, mellyel hol harmonikus, hol diszharmonikus módon egyenlítődnek ki és létrehozzák e kor oly érdekes, sokszor groteszk alakulatait.

Az így alakult világnak mélyértelmű és a művészet hatalmánál fogva nekünk laikusoknak is inkább hozzáférhető képét találjuk DANTE Divina Commediájában. Vessünk reá egy pillantást, annál is inkább, mert GALILEI e nagy szellemi alkotás ismerője volt, ki annak egy részletkérdését tanulmány tárgyává is tette.

DANTE az ihletett költő látnoki erejével tárja elénk a világot, úgy, amint azt a középkor egy nagy szelleme látta: legmélyebb filozófiai és teológiai, egyházi és állampolitikai elgondolásaival, komolyabb és naivabb természetfelfogásával és babonáival.

Ha nézzük, hogy milyen principiumok szerint van ez a világ rendezve, úgy azt kell mondanunk, hogy morális értékszempontok szerint. Kitárja előttünk az emberi gonoszság végtelen változatait és az elvetemültség, az abszolút jótól való távolság fokozatait. Ez a pokol. A pokol különböző köreinek lényeges tartalma mai szemmel nézve éppen a bűn lelki állapotainak leírása, úgy amint az az ott leírt és a földön végbement cselekményekben jut kifejezésre. Hasonlóan a megigazulás és a lelki emelkedettség fokainak leírása a purgatóriumban és mennyországban, az abszolút Jóhoz, a szeretethez vezető úton, mely áthatja és mozgatja a világot.

Ez az értékszempontok szerint rendezett világ ki van vetítve egy aristotelikus-ptolemaikus térbeli világba, melynek közepén áll a Föld, melynek felülete a változó és múlandó dolgok, a küzdő, bűnre és erényre képes emberiség színhelye. Ennek belsejében a kárhozat világa, mely az örök szeretettől elfordult, felette növekvő szférákban az örök Jó birodalma, az ég.

Ha a morális és lelki világ ábrázolását tekintjük, e mű a legmodernebb ember számára is a mély belátások kimeríthetetlen kincsesbányája. DANTE korában és még később is a morális világ leképezését a térbeli, materiális világra sokszor igen szószerint vették és talán kevesen látták e két világ éles elhatárolását, sőt egy magas szupranaturalizmusnak egy naiv materializmussal való kapcsolata a szabály. De hogy a morális világnak milyen tiszta szemléletére emelkedtek, arra csak KEMPIS TAMÁS Imitatióját és ECKEHARDT mester prédikációit idézem.

A morális világ mellett a természet világa háttérbe szorul, inkább keret, mint valóság, melyet oly elvek és szempontok szerint értelmeznek, melyek ma igen idegenszerűen hatnak reánk. Nem a közvetlen érzéki adottság az, ami előtérben áll, hanem az általános sajátságok, az absztraktumok, ezeknek magasabbrendű létet tulajdonítanak. Ez a PLATONra visszamenő «realizmus» a nominalisztikus ellenáramlat dacára a középkor uralkodó felfogása. Absztraktumok, mint jóság, kevélység, irgalmasság szinte mint valóságos lények szerepelnek, a költészet és képzőművészet csupa szimbolum és allegória. Így van ez DANTEnál, így a világias Roman de la Rose-ban, így GIOTTO híres freskóiban, az assisi alsó templomban. A szimbolikus gondolkodás a középkor egész életformáját áthatotta, a hierarchikusan felépített társadalom, a lovagrendek, az egész heraldika, az erotika pl. a troubadourköltészet, a vallás szertartásai az élet minden vonatkozását szimbolikus momentumokkal szőtték át. A természet tüneményeit nem sajátos természetük szerint vizsgálják, hanem azoknak mindig valamit «jelenteniök kell», szerencsét vagy szerencsétlenséget, így a bolygók helyzeteinek, egy üstökös megjelenésének az emberi sorsra közvetlen jelentése van.

Mert bármennyire szidalmazzák és lebecsülik a földi dolgokat, mégis minden az ember sorsa és vágyai körül látszik forogni. Ha piros és fehér rózsákat látnak tövisek közt virítani, úgy szent szűzekre és mártirokra gondolnak, kik üldözőik között diadalmaskodnak. A számok: a hármas, a hetes stb. mind titokzatos jelentéssel bírnak. A már említett asztrológián kívül az alchimia is sok értékes megfigyelésen kívül telve van csupa titokzatos vonatkozással még a bolygókra is.

Egy ilyen alapfelfogásra egy nagy rendszert építettek rá, felhasználva az ARISTOTELEStől eredő logikai formalizmust. De minden tudományos külszín mellett egy alapjában mitikus, analógiás világképpel van dolgunk. Az érzékelhető, konkrét dolgoknak csak úgy van értékük, ha az egyedül értékelt metafizikai valóságra utalnak: annak szimboluma, előképe. Még GIORDANO BRUNO, ki kora felfogásával sok tekintetben ellentétben van, szintén analógiás-allegóriás módon gondolkozik, sőt sokszor még KEPLER is.

Ez természetesen nem zárja ki azt, hogy komoly és tárgyilagos megfigyelések és gondolatok előforduljanak, csak nem ezek határozzák meg az általános képet.

Összefoglalva egy hatalmas világkép tárul elénk, mely naiv és elvont, felületes és mély elemekből épül ugyan fel, de mégis egy egész benyomását kelti és mely esztétikai varázsát egy modern szemlélőre sem igen tévesztheti el. Minden dolognak megvan a maga helye e világban, a morális dolgok, az ember félelmei és vágyai, a világ története, a természet jelenségei organikusan illeszkednek be. És ki ezen gondolatvilágban nőtt fel és annak kategoriái szerint gondolkodik, e világ megbolygatását bármely semleges területen nyugtalansággal fogja észlelni, mert látszólag minden olyan szorosan függ össze, hogy egy épületkő eltávolítása az egész épületet veszélyezteti.

De az élet nem ismer megállást és stagnálást és számos tényező működött közre, az oly tökéletes és lezárt rendszert többféle vonatkozásban kikezdték. Midőn a Konstantinápolyból elmenekült görög tudósok révén a klasszikus kor eredeti kútfőivel megismerkedtek, ez óriási élményként hatott és egy nagyjelentőségű új fejlődés kiindulópontjává vált. Ezt a hatást is a tekintély kategóriája alatt appercipiálták, a görögök és a rómaiak mint a kultúra utolérhetetlen mesterei állottak előttük és a feladat csak az volt, utánozni és elérni őket, és sokszor utánozni véltek, mikor hallatlanul nagy és eredeti dolgokat alkottak. De mindenesetre a szellem szabadságához nagy mértékben hozzájárult, hogy a régi tekintélyek mellett új tekintélyek is felléptek: a szkolasztikával összeolvadt klasszikus filozófia mellett az eredeti alakjában, a természettudomány területén Aristoteles, Ptolemaios és Galenus mellett minden idők egyik legnagyobb matematikusával és fizikusával Archimedesszel is megismerkedtek, valamint megismerték Aristoteles antik kritikusait is.

A nagy földrajzi felfedezések, Amerika felfedezése és a Föld körülhajózása nemcsak a látkört tágították új viszonyok és népek megismerésével, hanem igazolták a Föld gömbalakját, melyet ugyan Aristoteles is ismert, de a középkorban nagyon vitatott felfogás volt, mert az Antipodusok kérdése a látszat számára bizonyos nehézséget jelentett. A technikai felfedezések: a papír, lőpor, iránytű, könyvnyomtatás szintén éreztették hatásukat. Az egész középkor társadalmi és hierarchikus rendszere számos kritikára talál úgy az egyházon belül, mint kívül és egy mélyreható újjáépítés szükségét általában érzik.

Galilei idejében az első nagy mozgalom, a renaissance és a reformáció, már lezajlott és az ellenreformáció legnagyobb kifejlődése stádiumában volt, ez a harmincéves háború ideje. De a tudományban még nagymértékben érvényesek voltak a középkor gondolkozási formái.

A tudomány területén a legmélyrehatóbb átalakulások egyike azon területről indult ki, mely minden tökéletlensége és heterogén elemekkel való kapcsolata mellett úgy a görögöknél mint a középkorban már határozott tudomány jellegével bírt: ez a makrokozmosz tudománya, az asztronomia. Mindaz ami a Földre vonatkoztatva egyszerűen leírható volt, ismeretes volt: tehát lényegében az egész szférikus asztronomia. Az évszakok értelmezése, a naptár, a napéjegyenpontok előnyomulása a fogyatkozások idejének és a bolygók helyeinek előre való kiszámítása a tökéletesség jelentékeny fokát érte el. A jelenségek nagyszerűsége, a geometriai vonatkozások átlátszósága, valamint az a titokzatosság ami a csillagoknak az emberi sorsra való vélt befolyását körülvette, az asztronomiának a tudományok sorában előkelő helyet biztosított és nagy tekintélye volt.

A mellett szorosan össze volt kapcsolva az egész világfelfogással: a Föld centrális helye a mindenség középpontjában megfelelt annak a felfogásnak hogy minden az emberért van, minden, nemcsak fizikai értelemben, körülötte forog.

Midőn Copernicus felelevenítve egyes görög csillagászok, mint Aristarchos felfogását, kifejtette, hogy a bolygómozgás sokkal egyszerűbben értelmezhető, ha feltesszük, hogy nem a Föld, hanem a Nap áll a bolygórendszer centrumában ez két okból nagy megdöbbenést keltett. Először annyira ellentmond a látszatnak, hogy ezért sokaknak eleve nevetségesnek tűnt fel. Másrészt, elmozdítva a Földet a mindenség centrumából és egy bolygóvá degradálva, veszélyeztetni látszott az egész metafizikai világképet, melynek centrumában az ember áll. Copernicus rendkívül tartózkodó volt távolabbi következtetéseket illetőleg, de mások, kik Copernicus rendszerének matematikai előnyeit nem értették és nem értékelték, mint Giordano Bruno, azonnal érezték, hogy itt egy új világkép van kialakulóban, érezték, hogy mit jelent a tér végtelensége és a világok végtelen száma. Ennek adott Giordano Bruno lelkes és izzó kifejezést, ami ellentétbe vitte korával és őt a máglyára juttatta.

Copernicus művének tudományos gondolatait tovább kiegészítették és új tapasztalatokkal támasztották alá Galilei és Kepler. Mindkettőjük munkája egy új nagy szintézist készített elő, Newton dinamikáját, amivel a fizika egy jelentős és alapvető korszaka lezárul.

II.

Az a férfiú, ki a tudomány fejlődésének egy ily nevezetes korában oly döntő befolyást volt kifejtendő, egy firenzei család sarjaként Pisában született 1564 február 15-én. Családja tagjai Firenzében már többízben viseltek előkelőbb tisztséget. Atyja, Vincenzo Galilei, kiváló műveltségű egyén, kinek a zene elméletére vonatkozó értékes vizsgálatai fennmaradtak. Iskoláit Pisában kezdte, majd a valombrosai kolostorba adták, hol volt alkalma az aristotelikus formális gondolkodásmód elsajátítására, amiből később jelentékeny haszna volt. Hazatérve, az olasz klasszikusokkal, mint Dante, Tasso és Ariostóval foglalkozott, valamint zenével és rajzolással is. Majd a pisai egyetemre ment, hol a jövedelmező orvosi pályára készült. Az orvosi tanulmányok alapját akkor az aristotelikus filozófia képezte. Tanulmányi idejéből fennmaradt jegyzete számot ad a szkolasztikus tanulmányok rendes menetéről.

Sehol sem találni olyan megjegyzéseket, melyekből arra lehetne következtetni, hogy már ekkor ellentétben állott volna az iskolák felfogásával. Azért talán némi fenntartással kell fogadnunk hű tanítványának, Vivianinak, Galilei életrajzában közölt ama állítását, hogy már ekkor harcban állott volna a peripatetikus filozófiával. Az sem tekinthető biztosítottnak, hogy az ingalengések izokróniáját a pisai dóm egy lengő csillárján felismerte volna. Azonban vonzalma a matematikai tudományok iránt már ekkor felébredt, az egyetemet elhagyta a nélkül, hogy akadémiai fokot nyert volna el. Miután családja időközben visszatért Firenzébe, így ott folytatta tanulmányait privát úton, tanára Ostilio Ricci volt. Itt lépett érintkezésbe a mechanikai tudományokkal, melyek főkép a gyakorlat: csatornák építése, hidrosztatika, emelőgépek, építészet, ballisztika konkrét problémái kapcsán fejlődtek ki az általánosságokban mozgó természetfilozófiától nagy mértékben függetlenül. Ez a két hatás, melynek Galilei tanulmányai folyamán ki volt téve: egyrészt az aristotelikus-szkolasztikus hatás, másrészt a matematika és mechanika hatása, kiválóan előmozdították azt, hogy GALILEI a természettudományok nagy reformátora lehessen. Euklides geometriáján kívül főkép ARCHIMEDESszel foglalkozott, kinek hatása alatt egy hidrosztatikai mérleget konstruált, melynek leírása azonban csak halála után jelent meg. Eredménnyel foglalkozott ezidőben a testek súlypontjával is. E vizsgálatok megnyerték számára GUIDOBALDO DEL MONTE marchese kiváló matematikus támogatását, kinek ajánlatára a pisai egyetem matematikai tanszékét nyerte el 1589-ben. Feladata itt főkép az euklideszi geometria és a «szféra» előadása volt, az utóbbi alatt a csillagászat elemei ptolemaioszi alapon értendő. Ezt az alapot GALILEI nyilvános előadásaiban sem Pisában, sem később Paduában sohasem hagyta el. Amint fennmaradt kéziratai igazolják, GALILEI pisai korszakában főkép mechanikai problémákkal foglalkozott. Így PHILOPONOS és BENEDETTI nyomán Aristotelesnek a szabad esésre és hajításra vonatkozó felfogását teszi kritika tárgyává és az esés egy elméletét állítja fel, mely azonban még inkább az ARISTOTELES-féle gondolatformák keretében mozog, mint BENEDETTI felfogása. Értékes önálló gondolata a lejtőn való egyensúly visszavezetése az emeltyű törvényeire. Hogy ekkor már kísérleteket végzett volna a pisai ferde toronyról leejtett tárgyakkal és heves vitái lettek volna a peripatetikusokkal, az sem kézirataiból, sem más adatokkal nem igazolható és ezért az újabb kritika nem ad hitelt VIVIANI ilyen irányú közlésének. Hogy a COPERNICUS-féle felfogás már ekkor foglalkoztatta, arra az látszik utalni, hogy avval a kérdéssel foglalkozott, hogy egy a világ centrumában levő márványgolyó forgása «természetes» mozgás-e, azaz mozgását megtartja-e?

Az sem igazolható, hogy GALILEI konfliktusok miatt távozott volna Pisából. Úgy látszik, a rendkívül gyenge javadalmazás késztette erre, úgyhogy szerencse volt számára, hogy 1592-ben a páduai egyetem matematikai tanszékét sikerült elnyernie, amit ismét GUIDOBALDO DEL MONTE pártfogásának köszönhetett.

Pádua ekkor a velencei köztársasághoz tartozott és híres, nagy tradiciójú egyeteme volt. Itt működött előbb VESALIUS, az anatómia újraalapítója. Velencében lényegesen szabadabb szellem volt, mint az egykorú, ellenreformáció korszakabeli többi Itáliában. Az egyetemet számos külföldi kereste fel, protestánsok is, köztük sok előkelő és fejedelmi személy, és mindenki, bizonyos korlátok közt, szabadon élhetett. Az egész élet az Adriai és Földközi tenger nagyhatalmánál nagyvilágiasabb volt, az emberek jártak más országokban és a Keleten is, láttak más viszonyokat. A flottához tartozott a híres arzenális is, hol számos mechanikai probléma vetődött fel. Galilei az akkori szokás szerint házába vett előkelő tanítványokat és így számos értékes kapcsolatra tett szert. Kiváló velenceiekkel, mint Fra Paolo Sarpival, a trienti zsinat híres történetírójával, Fra Fulgenzio Micanzióval és egy előkelő patriciussal, Giovanni Francesco Sagredóval benső barátságot kötött, az utóbbinak híres dialógusaiban halála után örök emléket állított. Galilei nagyszerű tehetsége e környezetben értékes hatásokat felvéve és még értékesebbekkel viszonozva azokat, teljesen kibontakozott. Nagyszerű társalkodó, előadó és vitatkozó volt. Galilei később élete legboldogabb korszakának tekintette a Páduában töltött 18 évet 1592-től 1610-ig. Ekkor értek meg korszakalkotó mechanikai felfogásai, melyeket azonban csak öreg napjaiban, a híres «Discorsi»-ban tett közzé 1638-ban. Ekkor látott napvilágot első nyomtatásban megjelent közlése, mely az arányossági körzőre, egy általa feltalált szellemes számoló berendezésre vonatkozott.

Külső események egyelőre más irányba terelték kutatásait. 1604-ben az Opiuchus csillagképében egy új fényes csillag, ma nóváknak nevezik ezeket, tűnt fel és heves vitákra adott alkalmat. Ugyanis Tycho de Brahe, korának leghíresebb csillagásza és minden idők egyik legnagyobb észlelője 1572-ben észlelt egy ilyen nóvát és egy 1602-ben megjelent posthumus művében részletesen megindokolja, hogy ez valóságos csillag, nincs parallaxisa, és egyszersmind hangsúlyozza, hogy ellentétben Aristoteles felfogásával, bizonyítékot szolgáltat arra, hogy a csillagok világában is van változás. Galilei három nyilvános előadásban foglalkozott az új csillagokkal. Kijelenti, hogy azt sem tudja, mi egy közönséges csillag, még kevésbbé mi az új csillag. Nem tartja azonban valószínűnek, hogy az igazi csillag volna, hanem inkább egy ködtömeg, mely a földről az állócsillagok szférájába emelkedett és a Nap sugarait veri vissza. Ebben a felfogásban Galilei későbbi, szintén kevéssé szerencsés üstököselméletének csíráival találkozunk és ellentétével Tychoval szemben, mely megakadályozta, hogy e nagy csillagászt kellően értékelje.

1609-ben a távcsőnek Hollandiában történt felfedezése hírére Galilei önállóan konstruált egy távcsövet, mely felülmúlta a hollandi távcsöveket és azt először használta fel az égitestek észlelésére. Ez korszakalkotó felfedezésekhez vezetett: felfedezi a Hold hegyeit, helyesen értelmezi a Naptól meg nem világított Holdkorong hamuszürke színét, mint a Föld által való megvilágítás eredményét. Kimutatja, hogy távcsővel sokkal több csillag látható, hogy a tejút számtalan csillagból áll, felfedezi a bolygók és állócsillagok közti különbséget, mert míg az előbbiek látható korongot képeznek, addig az utóbbiak erős nagyításnál is pontszerűek maradnak. Felfedezi az irradiációt, melynél fogva fényes csillagok átmérője nagyobbnak látszik. Felfedezi a Jupiter négy holdját és evvel példát ad oly égitestekre, melyek nem a Föld körül keringenek. Felfedezését híres Nuncius Sidereus-ában teszi közzé 1610-ben.

E felfedezések a legnagyobb hatást tették kortársaira, de magára Galileire is. Innen kezdődik céltudatos küzdelme a Copernicus-féle világrendszer érdekében. Kortársai részint lelkesedéssel, az aristotelikus felfogás hívei azonban, és ezek voltak a hivatalos körök, részint tartózkodással, részint a legnagyobb ellenzéssel fogadták. Így Galilei kartársa a páduai egyetemen, Cremonini, híres aristotelikus és sok tekintetben független fő, vonakodott távcsőbe belenézni.

Galilei nagy hírneve lehetővé tette, hogy külső körülményein változtasson: 1610-ben a toscanai nagyherceg udvari matematikusa lett Firenzében. Evvel nagyobb függetlenséget és nyugalmat remélt elérni, hogy számos gondolatát, melyekről páduai kéziratai tanúskodnak, kidolgozza. Dacára, hogy az új állás nem volt előny és fény nélkül, ez végzetes lépés volt, mert egy sokkal függetlenebb poziciót áldozott fel és a bekövetkező súlyos konfliktusokban nem találta meg azt a védelmet, amit Velence hasonló esetekben saját embereinek nyujtott (Sarpi, Cremonini).

Firenzében egyelőre folytatta észleléseit és felfedezte a Venus fényváltozásait, ami újabb bizonyítékot szolgáltatott arra, hogy e bolygó a Nap körül kering. Majd a Saturnust észlelve azt találta, hogy e bolygó hármas. Eszközei nem voltak elég erősek ahhoz, hogy a gyűrűalakot felismerje, ez csak Huyghensnek sikerült később.

1611-ben Rómába ment, hogy felfedezéseit egyházi körökben demonstrálja, nevezetesen a Collegium Romanum-ban, a nagytekintélyű jezsuita egyetemen. Igen szíves fogadásra talált, a jezsuita atyák hónapok óta észlelték a Jupiter holdjait és mindenben igazolták Galilei megfigyeléseit. A kollégium matematikusa, Pater Clavius, kinek kommentárja Sacrobosco «Sphaera»-jához azidőben a csillagászat legelterjedtebb tankönyve volt, a peripatetikus filozófia híve volt ugyan, de műve utolsó kiadásában már kételyeket fejezett ki a Ptolemaios-féle rendszer iránt. A kiváló férfiú azonban már 1612-ben meghalt. Talán tekintélye és igazságszeretete a közelgő vihar símább lefolyását biztosította volna. A Collegium Bellarmin bíboros, a szent officium (inkvizíció) legbefolyásosabb tagja felhívására kedvező véleményt adott Galilei felfedezéseiről, őt kitüntetéssel fogadta. A Cesi marchese által alapított *Accademia dei Lincei* tagjai közzé választotta, a pápa is kitüntetéssel fogadta. A Copernicus-féle felfogás elismerését is szóvá tette Galilei Bellarmin bíboros előtt, de eredményt nem tudott elérni. Árny is esik azonban e fényes képre. Galilei agilitása gyanút keltett és neve ekkor először fordul elő az inkvizíció aktái közt. Amint számos híve van főkép, Cesi és környezete, ellenfelei is tömörülnek.

Hazatérve Firenzébe, Aristotelesnek ama tanítását kritizálja hogy az úszás a test alakjától függ és ezen alkalomból nyiltan kimondja hogy Aristoteles nem tekinthető a természettudományokban mérvadónak. Ugyanezen művében bejelenti a napfoltok felfedezését. Ebből egy elkeseredett prioritási vitája támadt Pater Scheinerrel. Nehéz ma eldönteni hogy Galilei, Scheiner vagy Fabricius észlelte-e először a Nap foltjait, valószínűleg egymástól függetlenül közel egy időben észlelték. Galilei a jelenséget úgy fogta fel hogy a foltok a Nap felületének alakulatai melyek keletkeznek és elmúlnak és felhasználta azokat a Nap tengelykörüli forgása meghatározására. Ez a felfogás nagy ellentétet váltott ki, mert a peripatetikus felfogás szerint a Nap a tisztaság és változatlanság jelképe mely foltokkal nem bírhat és változást nem mutathat. SCHEINER azért a foltokat a Nap előtt elvonuló bolygókkal magyarázta.

GALILEI felfedezései, ellentéte a peripatetikus filozófiával és állásfoglalása a COPERNICUS-féle rendszer mellett, mely bár nem volt hivatalosan elítélve, de orthodox körökben nem szívesen látták, amint a középkor világfelfogásával nem is jól egyezett, igen nagy feltűnést keltettek és heves ellenállást váltottak ki. Ekkor már nem is annyira az összeegyeztetés ARISTOTELESszel mint inkább a bibliával kerül előtérbe. Idézték Józsua csodáját, melyben JÓZSUA megállította a Napot és nem a Föld forgását. GALILEI egyik kiváló tanítványához és hű barátjához, PATER CASTELLIhez intézett levelében kifejezést ad annak a felfogásnak, hogy a biblia természeti jelenségekről a nép nyelvén ír és nem veendő szó szerint. De ez ekkor, a tizenhetedik században és az ellenreformáció idejében, a harmincéves háború előestéjén nem volt oly természetes, mint nekünk ma látszik. Egy dominikánus szerzetes, PATER CACCINI, Firenzében GALILEIt a szószékről nyiltan megtámadta, PATER LORINI pedig a CASTELLIhez intézett levél alapján feljelentette az inkvizíciónál. GALILEI egyik nevezetes, az uralkodó nagyherceg anyjához, KRISZTINA nagyhercegnőhöz intézett levelében kifejti, hogy bár a theologia elsőbbségét elismeri, az egyes tudományok kérdései saját területükön döntendők el.

GALILEI 1615-ben saját elhatározásából Rómába ment, hogy igazhitűségét igazolja és a COPERNICUS-féle rendszert az egyházon belül diadalra juttassa, vagy legalább megtűrését elérje. GALILEI meg volt győződve a hit és tudomány harmóniájáról. Beállítása az egyházzal és kora hierarchikus társadalmi rendszerével szemben pozitív volt, az egyház tekintélyével való szembefordulás, mint azt GIORDANO BRUNÓnál láttuk, teljesen távol állott tőle. Míg a személye ellen irányuló támadásokat sikerült kivédenie, addig az egyházi körök a már nagy mozgalommá nőtt COPERNICUS-féle felfogást veszélyesnek találták, GALILEI agitálása, demonstrációi, vitái csak mérgesítették a helyzetet és ezért a római inkvizíció 1616. február 24-én tartott ülésében a COPERNICUS-féle tant formálisan elítélte, COPERNICUS, FOSCARINI és STUNICA műveit eltiltotta, GALILEIt pedig BELLARMIN bíboros maga elé idézte és közölte vele, hogy a tan téves és igaznak nem állítható, amit GALILEI tudomásul vett. Hogy Galilei azt a parancsot is kapta volna, hogy a Copernicus-féle rendszert egyáltalában ne diskutálja, amint ezt második perében állították és melynek alapján elítélték, azt több író kétségbevonja, valamint az erre vonatkozó, Galilei perének aktái közt található alá nem írt jegyzőkönyv hitelességét is. Ellentmond ilyen parancs létének Galilei egész viselkedése a két per közti 16 évben, valamint Bellarmin bíborosnak Galileihez intézett levele. Copernicus tanainak elítélése nem maradt hatás nélkül és az új felfogás nyilvános taglalását Itáliában elnémította.

1618-ban három, köztük egy igen fényes üstökös jelent meg és Galileit ismét vitákba vonta. Aristoteles szerint az üstökösök a Föld kigőzölgései, melyek felemelkednek és meggyulladnak, de az alacsonyabb, «sublunaris» világhoz tartoznak. Evvel szemben Tycho de Brahe felismerte, hogy ezek égitestek, melyeknek határozott pályájuk van. Egyszersmind kiemelte, hogy e felfogás ellentmond Aristotelesnek, mert az üstökösök pályája az égi szférákat, melyeket szilárd kristálygömböknek gondoltak, átmetszi egyrészt, másrészt múló jelenség oly helyen, mely a változatlanság hona volna.

Pater Horatio Grassi, a Collegium Romanumban tartott és nyomtatásban is megjelent dolgozatában Tycho álláspontjára helyezkedett. Mivel a különben peripatetikus Grassi munkájában néhány tévedés is volt, így hogy a távcső kevésbbé nagyítja a távoli égitesteket, Galilei egy tanítványa útján kifejtette saját felfogását. Nézete közelebb áll Aristoteles felfogásához, szerinte is felszálló ködtömegek az üstökösök, melyeket a Nap világít meg. Az üstökös csóvája egyáltalában nem reális jelenség, amit az is mutat, hogy mindig a Nappal ellenkező oldalon lép fel. Nyilván itt a fődologban Tychónak, ill. Grassinak volt igaza. Éles vita fejlődött ki, Galilei az «Il Saggiatore» (Az aranymérleg) c. röpiratban felelt Grassinak, mely sok igazat tartalmaz, ragyogó szellemességű mű, mely nagy irodalmi sikert jelentett számára, de sok ellenséget is szerzett neki, így a Collegium Romanum, mellyel Pater Clavius idejében igen jó viszonyban volt, a P. Scheinerrel és P. Grassival való vitája óta ellenségévé vált.

Közben egy oly esemény történt, melyhez Galilei nagy reményeket fűzött. Maffeo Barberini bíboros, Galilei pártfogója, 1623-ban VIII. Orbán név alatt a pápai trónra lépett. Nagyszabású, a régi renaissance pápákra emlékeztető jelenség, nagy politikai tervekkel, a tudomány és művészet barátja. Galilei felfedezéseit latin ódában ünnepelte. A Saggiatore ajánlását elfogadta és ebéd alatt magának felolvastatta. Az *Academia dei Lincei* tagjai közül hármat magas állásba helyezett. Galilei nagy reményekkel volt eltelve, hogy sikerülni fog a Copernicus-féle rendszer ellen kiadott dekrétum hatálytalanítását kieszközölnie. A pápa kegyesen fogadta, a toscanai nagyherceghez intézett pápai brevében igen elismerően nyilatkozott Galileiről, de a lényegben Galilei semmit sem ért el. Így elhatározta, hogy a Copernicus-féle rendszert kifejti olyan formában, hogy formailag eleget tesz az egyház követelésének, nem állítja, hogy a rendszer igaz, de minden érvet felhoz mellette. A mű előszavában kifejti, hogy bár tudja, hogy a tan téves, de felhoz mellette minden érvet, nehogy azt gondolja valaki, hogy mikor e tant elítélték, nem ismerték volna a mellette szóló érveket. Ezt az előszót, mely a pápával egyetértésben jött létre, ma kínos olvasnunk. A mű számára a dialógust alakját választotta. Salviati Galileit képviseli. Sagredo, Galilei velencei barátja, a fogékony laikus, míg Simplicius a peripatetikus filozófia képviselője. A végén Simplicius győz avval az érvvel, hogy Isten végtelen hatalma és bölcsesége megengedi, hogy bizonyos jelenségeket, melyeket a Föld forgása mellett döntő érvként hoznak fel, egész másképp is lehet értelmezni.

A Dialogusok 1632-ben jelentek meg és nagy feltűnést keltettek. Hiába kapott minden nyomási engedélyt, az inkvizíció Galileit Rómába idézte és bár igen kíméletesen bánt vele, elítélte. Ünnepies esküvel meg kellett tagadnia a Föld mozgásának tanát, könyve eltiltatott és ő formális börtönre ítéltetett, de megengedték neki, hogy a Firenze melletti Arcetriben levő villájában élhessen. Hogy Galileit torturának vetették volna alá, annak alapja nincs, ennek nemcsak az iránta tanúsított kíméletes eljárás, hanem az is ellentmond, hogy midőn elítélése után Sienába távozott, a hordszékről felkelt és saját mulatságára órákig gyalogolt. De mindenesetre haláláig fogoly volt, látogatói korlátozva voltak, semmi művére nyomási engedélyt nem kapott. Az is legenda, hogy Galilei az ítélet után felkiáltott volna, hogy: «Mégis mozog». Az egész helyzet teljesen kizárja. De abban nincs okunk kételkedni, hogy gondolta és meggyőződéséhez sohasem lett hűtelen, ebben arcetri magányában könyve margójára írt jegyzetei megerősítenek. Számüzetésében is folyton dolgozott, 1637-ben, röviddel teljes megvakulása előtt felfedezte a Hold librációját. Befejezte a mechanikára vonatkozó alapvető művét: «Discorsi e dimonstrazioni matematichi intorno e due nuove scienze»-t, mely Leydenben Elzeviri kiadásában jelent meg 1638-ban. Tanítványai: Castelli, Viviani és utoljára Torricelli, valamint saját fia képezték környezetét számüzetésében. Meghalt 1642. január 8-án.

Galilei elítéléséhez sokféle tényező járult hozzá. Kollégái és versenytársak irígysége és sértett hiúsága, így a Scheinerrel és Grassival való vitájában igen jelentékeny tényező volt. Lehet, hogy ezek nélkül egyéni sorsa kedvezőbb lett volna, de tanai elítélését alig kerülhette volna el. Így láttuk, hogy 1616-ban Rómában a legmagasabb egyházi körök úgy ünnepelték, mint kora legnagyobb tudósát és ugyanakkor eltiltatott a Copernicus-féle tan. A kor még nem érett meg ekkor a morális és fizikai világ sajátos természetének és autonomiájának felismerésére. Azért teljesen lényegtelen kérdés, hogy elítélése a jogi formák betartásával vagy azok nélkül ment végbe, hogy VIII. Orbán pápa sértett hiúsága, kivel Galilei ellenségei elhitették, hogy a Dialogusok Simpliciusában őt figurázta ki, milyen szerepet játszott abban. Mindezek igen érdekes részletkérdések, melyek behatóbb tárgyalása a kor szellemére élénk világot vet, de a lényeges momentumra nem mérvadók.

Galilei, ill. Copernicus tanainak elítélése nem maradt súlyos következmények nélkül Itália szellemi életére és hozzájárult ahhoz, hogy a tudományos élet súlypontja más országokba helyeződött át. Hogy ez mennyire így van, azt mutatja, hogy mily módon tárgyalják Galilei után a világrendszer kérdését. 1651-ben jelent meg két tudós jezsuita, P. Riccioli és P. Grimaldi «Almagestum novum»-ja, mely komoly tudományos nívóra való törekvés mellett a legsúlyosabb szofizmáknak is helyt ad. Pedig Riccioli munkatársa, Grimaldi, nem kisebb ember, mint az, ki a fény diffrakcióját felfedezte, de mivel hiányzott nála az egészre való tekintett, ebből nem új fényelmélet lett, hanem csak egy érdekes kuriozitás maradt. Ha látjuk, hogy GALILEI és az új felfogás hívei, mint VIVIANI és BORELLI, milyen félve, milyen burkoltan védik az új tant, ez teljesen megvilágítja a helyzetet.

Lassanként azután megenyhült a helyzet és az egyház 1820-ban hivatalosan is megengedte a Föld forgásának és mozgásának tanítását.

Ezek az ellentétek ma már a multé és így teljes egyetértésben tudunk GALILEI géniuszának hódolni.

De élete és sorsa azért oly rendkívül érdekes és tanulságos, mert egy új igazság áttörésének tipikus, minden korban és bizony a jövőben is, folyton megismétlődő példája, mely majdnem mindig egy emberi tragédiával van összekapcsolva.

III.

GALILEI életének vázlatos áttekintése után vegyük figyelembe azokat a teljesítményeit, melyek a tudomány és a tudományos gondolkodás történetében korszakot alkottak. Ezek egyrészt a mechanikának, nevezetesen a mozgó testek mechanikájának, a szorosabb értelemben vett dinamikának, egész lényeges pontokban való előrevitele, úgy hogy némi joggal e tudomány alapítójának tekinthető. Másodszor a COPERNICUS-féle világrendszer alapvető tapasztalatokkal való alátámasztása és diadalra juttatása. Ez szorosan összefügg a mechanika kiépítésével, mert a föld mozgása elleni fő ellenvetések épp mechanikai meggondolásokból eredtek. Mindezekkel együttjárt és ezek előfeltétele volt a peripatetikus filozófia tehertételétől való szabadulás, az önálló gondolat és előítéletmentes megfigyelés jogának érvényrejuttatása.

GALILEInek mindhárom területen voltak előzői már a klasszikus korban és a XVI. és XVII. század gondolkozói és kutatói közt, de egyikük sem volt oly univerzális szellem és nem volt oly nagy író, mint GALILEI, ki úgy a tudósok, mint a művelt emberek széles köreinek érdeklődését fel tudta kelteni. COPERNICUS, TARTAGLIA, BENEDETTI eredményei a szakkörökre szorítkoztak, GALILEI minden művelt embernek írt. És ebben a korban ez fontos volt, mert a természethez való alapvető beállítást kellett megváltoztatni. Ki kellett mutatni, hogy az uralkodó nagy deduktív rendszer, a peripatetikus filozófia nem nyujt mást, mint az ARISTOTELES korabeli természettudományok összefoglalását, az egész deduktív levezetés általános elvekből látszat, mely új igazságra nem vezet. A természethez való közvetlen, naiv, kérdező viszonyt kellett helyreállítani, a tények és az egyszerű, de helytálló igazságok tiszteletét.

Foglalkozzunk először a világrendszer kérdésével. A görög és középkori asztronómia az égitestek mozgását a földre vonatkoztatva írja le. Az égitestek napi mozgása úgy jelentkezik, mintha a csillagok egy merev gömbre volnának erősítve, mely egy nap alatt tengelye körül megfordul. Mivel a Nap, a Hold és a bolygók a többi ú. n. álló csillagokhoz képest változtatják helyüket, feltették, hogy ezek mindegyike egy átlátszó kristálygömbre van erősítve, melynek szintén a Föld van középpontjában és mely külön forgást végez. Ez a felfogás a Nap és a Hold esetében elég nagy pontossággal kielégítő, csak a mozgás nem egyenletes sebességére való tekintettel kellett feltenni, hogy a Föld e gömböknek nem pontosan a centrumában, hanem kissé excentrikusan fekszik. A többi bolygó esetében ez sem elégséges, mert ezek látszólagos pályája az égen visszatérő hurkokat mutat. Itt feltették, hogy a Föld körül mozgó gömbön gurul még egy másik gömb, sőt ezen még egy harmadik stb. gurul és csak erre van a bolygó erősítve. Ezeknek az epicyklusoknak száma mindinkább szaporodott, amint az észlelések pontosabbakká váltak.

Most már annyira megszoktuk, hogy az égitestek szabadon lebegnek, hogy a merev kristálygömbök feltevése igen idegenszerűen hat. De ha látjuk, hogy az ég csillagai felkelnek és lenyugszanak anélkül, hogy kölcsönös helyzetük megváltozna, úgy a merev gömb a legközelebb fekvő gondolat. Ha azonban eltekintünk attól, hogy a gömböket éppen materiálisoknak tekintsük, úgy ezen elgondolás lényeges magja egy kinematikai gondolat, melyet ma is elfogadhatunk. Mert lényege az, hogy bármily mozgást felbonthatunk kör, ill. gömbi mozgásokra. Ezt alkalmazzuk ma is, ha egy bolygó koordinátáit Fourier-féle sorba fejtjük. A kvantumelméletnek Bohr-féle régebbi alakjában, de általánosítva a kvantummechanikában is éppen ezek a Fourier-féle tagok újra lényeges szerephez jutnak.

Az epicyklusok elmélete lehetővé tette a bolygók helyzeteinek elegendő pontossággal előre való kiszámítását. De meglehetősen bonyolult és nem vezet a bolygómozgás egyszerű és áttekinthető leírására. Sokkal egyszerűbb, ha a bolygók mozgását a Napra vonatkoztatjuk, ekkor első közelítésben a bolygók pályái körök. A Merkur és Venus a legkisebb sugarú körökön keringenek, azután jön a Föld, majd a Mars, Jupiter és Saturnus. Így rögtön érthetővé válik, hogy a Merkur és Venus sohasem állhatnak a Nappal szemben. A bolygók hurkolt pályáiról pedig úgy ad számot ez a felfogás, hogy a bolygókat a mozgó földről észleljük. Pontosabb leírásra itt sem nélkülözhetjük egészen az excentrikus köröket és epicyclusokat, amint Copernicus is kénytelen volt ezeket felvenni.

A geocentrikus felfogásnak egy modifikációja Tycho de Brahe rendszere. Ez kinematikailag teljesen ekvivalens a Copernicus-félével, ha mindent a Földre vonatkoztatunk. A Föld körül a Nap és a Hold köralakú pályákon kering. A többi bolygó pedig oly körökön, melyek középpontja a Nap. A belső bolygók pályáinak sugara kisebb, a külsőeké nagyobb, mint a nappálya sugara. A Ptolemaios-féle rendszerrel is harmóniában van, ha első epicyklusnak a nappályát vesszük. Fínomabb eltérések magyarázatára itt sem nélkülözhetők további epicyklusok. Galilei korában a geocentrikus felfogás komolyabb képviselőinél Tycho felfogása volt elterjedve. Az, ami ezidőtájt a kedélyeket mozgatta azonban nem az volt, hogy milyen testre, a Napra vagy a Földre vonatkoztatva írhatók le egyszerűbben a mozgások, hanem hogy melyik mozog valóban. Ezen az állásponton korának egyetlen kutatója, sem Galilei, sem Kepler, sőt még Newton sem emelkedett felül, és a nagy publikum még ma sem. Ennek megítélésében ne tévesszen meg bennünket Copernicus alapvető művéhez Osiander által írt előszó, mely Copernicus felfogását mint matematikai hipotézist állítja be, mely csupán a számítások megkönnyítésére való és mely nem akarja állítani, hogy a Föld valóban forog. Ez a kinematikai relativitás Galilei korában el volt ismerve, anélkül azonban, hogy elvi jelentőségét felfogták volna. Osiander előszava éppúgy, mint Galilei Dialogusaié, csak a könyvnek üldözésektől való mentesítését célozza.

A kinematikai problémát nagyobb pontossággal Kepler oldotta meg, midőn híres törvényeivel megadta a bolygók napra vonatkoztatott pályáinak igazi alakját, melyek ellipszisek, befutásuk módját és a keringési időnek a pálya méreteivel való összefüggését. Természetesen egy elliptikus pálya is felfogható mint körpályák összetétele, ez történik a FOURIER-féle előállításnál.

GALILEI összeköttetésben állott KEPLERrel, egymást kölcsönösen nagyrabecsülték, de GALILEIt a bolygók pályáinak pontos alakja, KEPLER törvényei nem érdekelték, azokról főművében említést sem tesz, sőt a kérdést nem is tekintette kellően tisztázottnak.

GALILEI és KEPLER igen eltérő egyéniségek voltak: KEPLERben több volt még a középkori analógiás gondolkodásból és több miszticizmus is volt benne, ami azonban nem akadályozta, hogy legexaktabb és legmélyebb belátásokra jusson el.

A heliocentrikus felfogás egyik főnehézsége abban állott, hogyha a Nap nyugszik az állócsillagok rendszerében és nem a Föld, miért nem bírnak az állócsillagok parallaxissal. COPERNICUS az állócsillagokat egy gömbön gondolta elhelyezve, mely az egész világegyetemet lezárja, amint azt az ő korában általában gondolták. Mivel parallaxis az akkori egyszerű eszközökkel nem volt kimutatható, fel kellett tenni, hogy e gömb sugara igen nagy a földpálya sugarához képest, egy gondolat, amitől nagyon idegenkedtek.

GALILEI már rámutatott arra az eljárásra, mely két évszázad mulva a parallaxis meghatározásához elvezetett. Ő már feltette, hogy a csillagok nem egy gömbhéjon vannak elhelyezve, hanem a térben szétszórva. Ha most két látszólag közellevő, de különböző abszolut távolú csillag látszólagos távolát pontosan meghatározzuk, annak évi periodikus változást kell mutatnia.

Általában a tér végtelenségének gondolata megdöbbenést keltett. GIORDANO BRUNO, kit a bolygómozgás matematikai elemzése egyáltalában nem érdekelt, éppen arra helyezte a fősúlyt, hogy COPERNICUS felfogása módot ad arra, hogy a világot ne egy zárt gömbhéllyal határoljuk, hanem az állócsillagokat mint napokat fogjuk fel, melyek a térben el vannak szórva és melyek körül bolygók keringenek. Amint láttuk, GALILEInek is ez volt a felfogása szemben KEPLERrel.

Egy más nehézséget is elhárított GALILEI. TYCHO szerint, ha az állócsillagok oly messze vannak, mint azt a COPERNICUS-féle felfogás megkívánja, úgy azok látszólagos átmérőjéből a valóságos átmérőre oly értéket kapnánk, mely a földpálya méreteit is meghaladná. GALILEI reámutatott az irradiációra, melynél fogva a fényes csillagok nagyobbaknak látszanak. Ma különben tudjuk, hogy vannak olyan csillagok, az ú. n. óriáscsillagok, melyek méretei a földpálya méreteit meghaladják.

A főnehézségek azonban nem a kinematika oldalán voltak, hanem a földi és égi testek látszólag eltérő természetében, ami azok mozgásában is megnyilvánul.

ARISTOTELES szerint a természet világában, mégpedig az anorganikus világban is célokra való törekvés nyilvánul meg. A testek iparkodnak «természetes helyüket elfoglalni». A nehéz testek, melyek főkép a két nehéz elemből, föld és vízből állanak, a mindenség centruma felé törekszenek, ez az ő természetes helyük. A könnyű testek: a levegő és tűz, felfelé törekszenek. A testek természetes mozgása egyenesvonalú mozgás felfelé vagy lefelé.

A természetes mozgáson kívül van «erőszakolt» mozgás, ilyen, ha egy nehéz testet felfelé hajítunk.[1]

A földi világ az ellentétek, a változás és mulandóság világa, a testek keletkeznek és elmúlnak.

Evvel az egész, a négy elemből összetett világgal szemben áll az égi világ. Ez a változó földi világgal szemben változatlan, ha a helyváltozástól eltekintünk. Túl van az ellentéteken. Az égitestek természetes mozgása az egyenletes körmozgás, mely semmiféle cél felé nem törekszik, mert mindig célnál van. Az égitestek alakja a gömb, melyet a legtökéletesebb testnek tekintettek. Anyaguk az aether.

Láthatjuk, hogy a földdel szemben az ég mint valami magasabbrendű, tökéletesebb szerepel, méltó lakhelye ARISTOTELESnél az isteneknek, a középkorban az üdvözülteknek.

És mégis a Föld van e tökéletes ég középpontjában, úgy látszik, minden a Földért és a rajta küzködő emberért van, körülötte forog minden, a bolygók konstellációi is az ő sorsát jelzik.

Evvel szemben a COPERNICUS-féle felfogás egyrészt degradálja

---

[1] Nem használom a «kényszerített« mozgás jelzést, mert ez a kifejezés a mai mechanikában egész határozott jelentéssel bír, mely nem fedi az aristotelesi fogalmat.

az eget, másrészt elveszi a Föld kiváltságos helyét. A Föld nincs a mindenség középpontjában, hanem egy bolygó a többi közt, a Nap egy csillag a többi közt. Nehéz ekkor elgondolni, hogy a bolygók valamely véletlen kofigurációja az egyes emberek sorsára mérvadó legyen. Másrészt az sem valószínű, hogy az égitestek különleges anyagból legyenek és különleges tökéletességgel bírjanak. Galilei kimutatta, hogy a Holdon hegyek vannak, melyek éppúgy árnyékot vetnek, mint egy földi hegy. A Napon, melyet addig az égi tisztaság szimbólumaként tiszteltek, foltok vannak, melyek keletkeznek és elmúlnak. A Venus fényváltozásokat mutat, mint a Hold. A Jupiter körül négy hold kering, egy kis bolygórendszer, melynek nem a Föld a középpontja.

A kristályszférák feltevése is tarthatatlanná vált, ha a Föld a Nap körül kering, mert látjuk, hogy a Föld nincs kristályszférára erősítve. Amint már láttuk, Tycho is egy erős érvet szolgáltatott a kristályszférák ellen az üstökösök pályáival, melyek átmetszenék és átlyukgatnák azokat. Galilei az üstökösök kérdésében elmaradt Tychoval szemben. Az üstökösök bolygótermészetének megállapítása csak Newtonnak és Halleynek sikerült, az utóbbi volt az, ki először számította ki egy üstökös pályáját és mondta előre visszaérkezését.

A Föld tengelykörüli és a Nap körüli mozgása ellen már Aristotelesnél a legfőbb érv a kor mechanikai felfogásából eredt, mely még igen kezdetleges volt.

Az egyik érv az volt, hogyha egy toronyból leejtünk egy követ, forgó Föld esetében ennek nem a torony aljára kellene esnie, hanem oly távolra attól, amennyire az esés tartama alatt a Föld elforgott. Ezt az érvet számtalan módon variálták: egy pontosan felfelé lőtt ágyúgolyónak vissza kellene esnie az ágyú torkába, ha a Föld nem forog, különben távolra esne. A madarak visszatalálnak fészkükbe stb. Galilei evvel szemben kifejti, hogy a kő a torony tetején már bír a torony és a Föld mozgásával és ezt megtartja mozgása közben. Hivatkozik arra, hogy egy nyugvó tengeren gyorsan vitorlázó hajó árbocáról leeső tárgyak az árboc aljára esnek, úgy mint a nyugvó hajón. Egy zárt kabinban minden jelenség úgy folyik le, mintha a hajó állana és meg sem tudjuk állapítani, hogy a hajó mozog-e?

Galilei kifejti, hogy vízszintes pályán mozgó test sebességét a súrlódástól eltekintve megtartja, ellenben a tehetetlenség elvét egész általánosságban soha ki nem mondta. Azt is feltette, hogy a lég teljesen nem követi a Föld forgását és ebből magyarázta a passzátszeleket.

A Föld forgása számára a legsúlyosabb érvnek a dagály és apály jelenségét tartotta. Ezt úgy magyarázta, hogyha a Föld forgásához hozzáadjuk napkörüli transzlatorikus mozgását, úgy a Föld pontjainak sebessége növekszik ott, hol a két mozgás iránya megegyezik, csökken, hol ellenkező és így a nap folyamán gyorsul és lassúbbodik. A tenger vize ezt a változó mozgást nem tudja követni és majd az egyik, majd a másik parton túllépi határait, úgy, mintha egy gondolában egy vízzel telt edény van és a gondola sebessége változik. Ez a mechanika szempontjából teljesen hibás elgondolás már azért sem állhat meg, mert nem ad számot az árapály napi közel egy órai késéséről. Kepler már reámutatott a Hold vonzására, de Galilei a vonzóerőkben afféle szolasztikus «qualitas occulta»-kat látott és ezt nem fogadta el. Elméletét igen nagyra tartotta és kortársai sem látták hibás voltát.

Mai szemmel nézve Galileiben látjuk a mozgás relativitásának lényeges pontokban való egyik első felismerőjét, ezért nevezik ma az egyik inerciarendszerről egy másikra való transzformációt Galilei-transzformációnak, mely a Lorentz-transzformációnak a fénysebességhez kis sebességekre érvényes speciális esete. Ez áll egymáshoz képest egyenletes transzlációt végző rendszerekre. De egymáshoz képest gyorsuló, így egymáshoz képest forgó mozgást végző rendszerek közt csak kinematikai és nem dinamikai ekvivalencia áll fenn. Egy az állócsillagokhoz rögzített koordinátarendszerben fennállanak bizonyos mozgási törvények, melyek nem állanak fenn egy ehhez képest forgó rendszerben. Ezen alapulnak azok az összes kísérletek, melyek a Föld forgását a Földön végzett kísérletek segélyével mutatják ki: eltérés lövedékek mozgásánál, Foucault ingakísérlete, Eötvös-effektus stb. Ennek az eltérés mibenlétének általános megfogalmazása Galilei idejében még nem volt lehetséges. Ma úgy mondjuk, hogy a forgó rendszerben fellépnek a koordinátaerők, úgymint a centrifugális erő és a Coriolis-féle erő és hozzájárulnak a többi erőhöz. Ezen erők tekintetbevételével a két egymáshoz képest forgó rendszer teljesen ekvivalens, vonatkoztathatjuk a mozgást akármelyikre és nyugvónak tekinthetjük akármelyiket. Csak vannak olyan rendszerek, melyekben a mozgás törvényei igen egyszerűek, ezek az inerciarendszerek, melyeket jó megközelítéssel az állócsillagokhoz rögzített vagy hozzájuk képest egyenletes egyenesvonalú egyenletes mozgást végző rendszerek valósítanak meg. Ez az az álláspont, amire a klasszikus mechanika alapján eljuthatunk.

Az ú. n. általános relativitás elve ezen még túlmegy, de ennek tárgyalásába itt nem bocsátkozhatunk.

Amint láttuk, már COPERNICUS-féle felfogás ellen felmerülő kifogások elhárítására szükséges volt a mechanika alapjelenségeinek tisztázására. GALILEI ezt nemcsak oly mértékben vitte keresztül, hogy az ellenvetések elhárítására képes volt, hanem a mechanikának mint önálló tudománynak is megvetette az alapjait. De az égi és földi mozgás közti ürt nem sikerült teljesen áthidalnia, az égitestek mozgása nála is körmozgás, melyet más elemibb elvre nem sikerült visszavezetnie. Ez csak később sikerült a GALILEI által megalapozott mechanika továbbfejlesztése által NEWTON-nak, ki kimutatta, hogy a hajított kő és az égitestek mozgása ugyanazon törvényeknek engedelmeskedik.

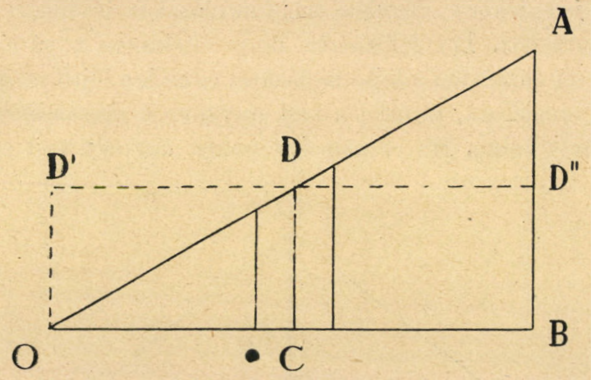
Hogy ez lehetséges legyen, először a szabad esés és a hajítás törvényeit kellett tisztázni.

A szabad esésre és hajításra ARISTOTELES állított fel néhány tételt. A testek sebessége arányos tömegükkel, különböző közegekben a sebesség arányos a közeg ritkaságával, azaz mai nyelven szólva fordítva arányos a közeg sűrűségével, amiből ARISTOTELES azt következtette, hogy üres tér nem lehetséges, mert abban az esésnek végtelen nagy sebességgel kellene végbemenni. A hajításra pedig azt a sajátszerű feltevést tette, hogy a hajító kéz a levegőt is mozgásba hozza és ez viszi a testet tovább magával. Ezeket a legdurvább tapasztalattal ellenkező tételeket már a VI. században kritika tárgyává tette ARISTOTELES egy kommentátora, PHILOPONOS, kevéssel GALILEI előtt pedig BENEDETTI. GALILEI pisai idejében ezek nyomán kritizálta Aristotelest és kifejtette a hajítás egy elméletét, melyben nem a mozgás leírására törekszik, hanem annak okát akarja adni. Szerinte egy felfelé való hajításnál a test egy «vis empressa»-t kap, amint ez elfogy, felülkerekedik a test természetes, lefelé irányuló mozgása, a test sebessége kisebb lesz, majd lefelé növekvő sebességgel mozog, míg eléri «természetes» sebességét, melyet aztán meg is tart. Itt már BENEDETTI tisztábban látott, ki a növekvő sebességet úgy magyarázza, hogy a test esésénél a nyert impulzusok összegeződnek. Ilyenféle, az okokra irányuló kérdéstételek kiküszöbölése képezi GALILEI későbbi, páduai korának egyik legnagyobb érdemét és a Discorsi legfontosabb részét.

A szabad esésre vonatkozó vizsgálatait megelőzték és elősegítették statikai vizsgálatai, melyeket ARCHIMEDES tanulmányozása érlelt meg benne. ARCHIMEDES megállapította az emeltyű és az úszás törvényeit. Már a görögök, azután GUIDOBALDO DEL MONTE észrevették, hogy a különböző gépi berendezésekkel «a természetet nem lehet becsapni», hogy amit nyerünk erőben, azt elveszítjük sebesség, ill. útban. GALILEI volt azonban az első, ki felismerte, hogy a virtuális elmozdulások elvében egy általános elv van adva, melyből az egyensúly speciális esetei mind levezethetők. A lejtőn való egyensúly is többek közt. Éppúgy GALILEI érdeme a «momentum», értsd a forgató nyomaték lényeges voltának kiemelése. Előtte úgy fejezték ki magukat, hogy egy test az emeltyű két különböző karhosszúságú pontjaiban különböző súllyal bír, a testek sajátos helyeiken különböző nehezek. GALILEI élesen megkülönböztette a momentumot az erőtől és úgy fejezi ki, mint ma szokás, hogy az erő ugyanaz, de a momentum más. Jellemző, hogy kritikusai a momentum szó filológiai elemzésével támadták, míg GALILEI tudatosan kijelentette, hogy ő a momentum szót jól definiált értelemben használja és a szó használata más íróknál reá nem mérvadó.

A szabad esésre GALILEI megállapította, hogy ez a testek súlyától független, kivéve igen könnyű testeknél, melyekre a levegő ellenállása számottevő. A pizai ferde toronyról leejtett testekkel végzett kísérletei azonban nem igazolhatók. Eleinte arra gondolt, hogy a sebesség az úttal arányos, de azután felismerte, hogy az arányosság az idővel áll fenn. Általában jellemző GALILEI matematikai eljárására, hogy mindig azt kérdi, mi arányos mivel? Ma inkább azt kérdezzük, hogy egy mennyiség milyen függvénye más mennyiségeknek.

Abból, hogy a sebesség arányos az idővel, igen szép geometriai meggondolás útján megállapítja a megtett út függését az időtől. Rajzoljuk fel abcissának az időt, ordinátának a sebességet, úgy az ordináták végpontjai egy OA egyenesen fekszenek. Ha a sebesség t idő mulva AB, $^1/_2t$ idő mulva DC, a végsebesség fele. A félidőtől ugyanannyira előbb vagy hátrább, a sebesség ugyan-



1. ábra.

annyival lesz nagyobb vagy kisebb, tehát amit a mozgás az idő első felében elmulaszt, azt a második felében pótolja. Tehát az utat megkapjuk, ha az egész mozgást a fél sebességgel gondoljuk befutva. Az ábrából látható, hogy a megtett út az OAB háromszög területe, ez pedig egyenlő az $OBD'D''$ négyszög területével.

Ha a sebesség v, a gyorsulás g, úgy egyenletes gyorsulásnál:

$$v = gt,$$

és az út:

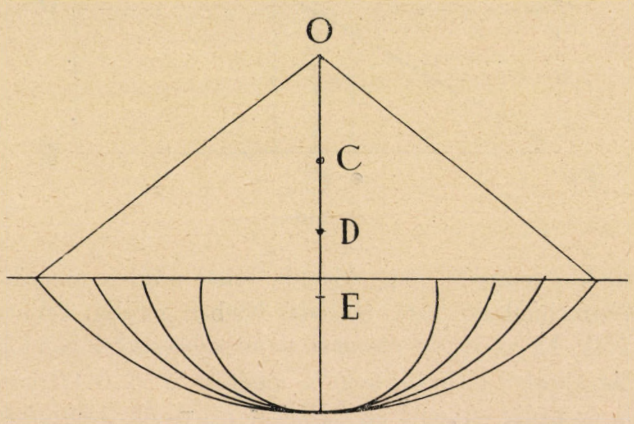
$$s = {^1/_2}v.t = {^1/_2}g.t^2.$$

Ez az okoskodás integráció speciális esetben. GALILEInek voltak más infinitezimális meggondolásai is, melyeket egyes szerzők szerint CAVALIERI kérésére vett be főművébe.

A szabad esés, mint az állandó gyorsulással bíró mozgás típusa alapvető fontosságú, mert minden mozgás elég kis darabja ilyen mozgással közelíthető meg. Azért ma is minden fizikai tanulás alapja, ezt kikerülni és atomokról és elektronokról mesélni kellő alapvetés nélkül a fizikának visszasüllyesztése a GALILEI előtti állapotba.

A szabad esés közvetlen kísérleti tanulmányozása a GALILEI korabeli segédeszközökkel nem volt lehetséges. Ezért egy más, szintén egyenletesen gyorsuló mozgást, a lejtőn való esést tette vizsgálat tárgyává. Mivel itt a gyorsulás kicsinnyé tehető, a mérés keresztülvihető volt. GALILEI az időt egy nagy edényből kifolyó vízzel mérte és igazolta az út függését az időtől.

Igen jelentékeny elméleti megfontolásokat is fűzött a lejtőn való mozgáshoz. Így felismerte, hogy eltekintve a súrlódástól, a végsebesség független a lejtő hajlásától és csak a lejtő magasságától függ, ugyanakkora, mintha a test ugyanazon magasságon át szabadon esett volna. Ha ez nem így volna, úgy egy test egy lejtőn

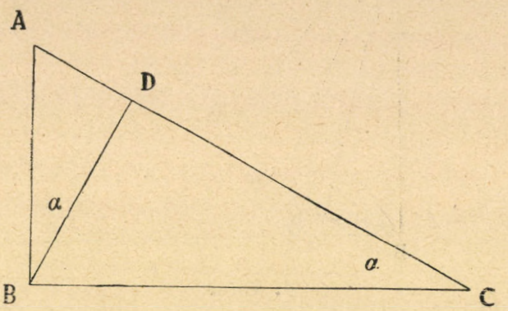


2. ábra.

leesve oly sebességet kaphatna, hogy egy más lejtőn magasabbra emelkedhetne avval, mint eredeti magassága volt. Tehát egy test magától magasabbra juthatna, ami a tapasztalattal ellenkezik. Egy szép ingakísérlettel mutatta meg GALILEI, hogy az inga mindig ugyan arra a magasságra tér ki. Függesszünk egy fonálra egy golyót és hozzuk lengésbe, midőn a szélső helyzetekben a golyó egy bizonyos magasságot ér el. Azonban ugyanakkora magasságot fog akkor is elérni, ha a fonál vertikális helyzetében C vagy D helyen egy szeget helyezünk, mely az ingahosszúságot megváltoztatja.

Ebben az okoskodásban a mechanika energiatételének sejtése dereng.

Ha a végsebesség lejtőn ugyanaz, mint a szabad esés esetében, úgy az esési idő arányos a lejtő hosszával. Ha a vertikális AB, a lejtő hossza AC, úgy fennáll:



3. ábra.

$$AB = \frac{v}{2} t, \quad AC = \frac{v}{2} t',$$

azaz:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{t}{t'},$$

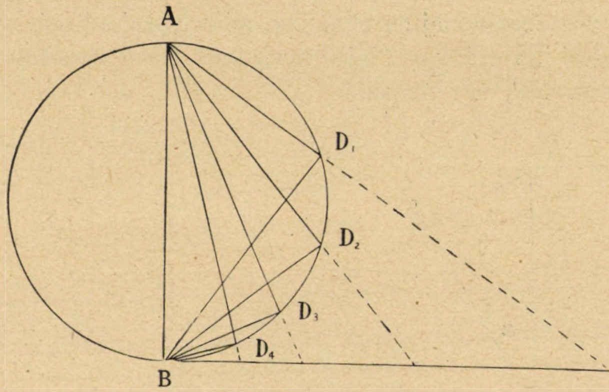
ebből megkaphatjuk a gyorsulások viszonyát is:

$$v = gt, \quad v = g't'_1, \text{ tehát: } \frac{g'}{g} = \frac{t}{t'} = \frac{AB}{AC} = \sin \alpha,$$

azaz:

$$g' = g \sin \alpha.$$

Ebből fontos következtetéseket von. Míg a test szabadon esik AB távolságon át, a lejtőn AD távolt írja le. Ebből tovább az is következik, hogyha egy kört írunk AB vertikális távol mint átmérő körré, úgy az AD_1, AD_2, AD_3,... AB távolokat ugyanazon idő alatt futja be, de éppúgy a BD_1, BD_2, BD_3,... távolokat is, mert csak a hurok hossza és hajlása mérvadó. Ez kis kilengésekre az ingamozgás izokronizmusára vezet. GALILEI kimutatta az izokronizmust hurokra, kis kilengésekre a húr közel egyenlő az ívvel és az ingamozgást mint lejtőmozgást fogva fel, megkapjuk az izokronizmust. A körívekre nem tudta kimutatni. Foglalkozik avval a kérdéssel, hogy melyik az a görbe, melyen legrövidebb idő



4. ábra.

alatt fut be megadott magasságkülönbséget, tehát a brachystochrone problémájával.

Az inga lengéséről tudja, hogy függ az inga hosszától. MACH[1] szerint a húrok fentemlített törvényéből egy közelítő formula a lengésidőre levezethető és valószínű, hogy GALILEI ezt ismerte. Ugyanis a vertikális átmérőn való esésre fennáll, ha l az inga hossza és így $AB=2l$.

Ekkor:

$$2l=\frac{gt^2}{2},$$

amiből a lengésidőre adódik:

$$T=8\sqrt{\frac{l}{g}},$$

míg a helyes, az ívre vonatkozó formula:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Arra is gondolt, hogy az ingát órák szabályozására használja fel, ezt a problémát azonban csak HUYGHENS oldotta meg.

A szabad esés természetének felismerése a hajítás tárgyalását is lehetővé tette. Ezt GALILEI mint vízszintes egyenletes mozgás

[1] *E. Mach.* Die Mechanik in ihren Entwicklung. 7. Auf. p. 157—158.

és az egyenletesen gyorsuló szabad esés összetételét fogja fel. Megállapítja a pálya parabólikus alakját. Azt is kimutatja, hogy a ferde hajítás ettől nem különbözik lényegesen, mert az is felfogható mint oly parabola, melynek a vízszintes hajítás parabolája csak egy része.

Nagy haladás volt ez, mert még Tartaglia úgy tárgyalja a hajítást, hogy a pálya áll egy egyenes kezdő, köralakú közép és vertikális végdarabból. A felfogás itt az volt, hogy a test impulzusa egy idő mulva kimerül és akkor átmegy a szabad esésbe.

A Discorsi egy másik főproblémája a szilárdságtan megalapozása. Itt oly döntő belátásokra nem jutott, mint a dinamikában.

Kiindul a szilárdság elméletéből. Úgy gondolja, hogy a szilárd testek számtalan kis üreget tartalmaznak és a természet idegenkedése az üres tér iránt, a hirhedt «horror vacui» tartja össze a testet. Galileinél lényeges haladás, hogy tudja, hogy a «horror vacui»-nek határa van, a víz szivattyúkban nem emelhető magasabbra, mint 18 rőf. Talán nem véletlen, hogy Galilei utolsó tanítványa, Torricelli, a levegő nyomásának felfedezésével tisztázta ezt a kérdést. Galilei azután különböző alakú tartók és oszlopok szilárdságát vizsgálja.

Még felemlítjük Galilei Thermoskopját, mely hőmérőnek nem tekinthető, mert a fixpontokat nem ismeri.

Említésre méltó szellemes gondolata a fénysebesség mérésére vonatkozik és emlékeztet Fizeau későbbi módszerére. *A* észlelő *B* észlelőnek lámpával jelt ad. *B* viszonozza a jelt, amint *A* jelét látja. *A* jeladása és a *B*-től visszaérkezett jel közti idő az, amire a fénynek az *AB* távol kétszeres befutására szüksége van.

Nem mondhatjuk, hogy az újkor fizikáját Galilei hozta létre. Széles mederbe folyó mozgalom volt az, melyben különféle nemzetek képviselői vettek részt. De Galilei egy döntő pillanatban elhatározó helyen áll, nemcsak nagy felfedező és éles kritikus, de nagyszabású egyéniség is és fényes író, ki nézeteit elismeréshez is tudja juttatni. Helyzete magával hozta, hogy számos konfliktusba került, de ez elkerülhetetlen, ha valaki kora gondolkodását nemcsak előbbre viszi, hanem annak más irányt is ad. Mint a független gondolkodás képviselője neve szimbólummá vált, akár Sokratesé.

A Galilei-féle konfliktus azt is mutatja, hogy mélyreható történeti átalakulásokban egy előbbi kor legmélyebb eszméi megmaradnak és konfliktusokra van szükség, hogy ezt a mély eszmei tartalmat el lehessen választani olyan múló formáktól, melyeket vele összekapcsoltak. Így kiderült, hogy a heliocentrikus rendszer nem veszélyeztette a keresztény ethika értékeit, sőt még az aristotelikus filozófia igazi értékei, megtisztulva attól, ami mulandó, megmaradtak.

Galilei után a tudomány fejlődése nyugodtabb mederben folyt tovább. Descartes megteremti az analitikai geometriát és evvel új és hatalmas segédeszközt ad a természet kutatói kezébe, egy nyelvet, mely hajlékonyabb, mint Galileinek proporciókban való gondolkodása. Leibniz és Newton megállapítják az infinitezimális módszereket. Ekkor érett meg az idő a mechanika átfogó egységes elméletére, amit Newton valósított meg. Evvel Aristotelesnek, a tudomány első nagy rendszerezőjének és axiomatizálójának tudományideálja valósult meg tisztultabb formában. Azt hiszem, a szellem szerint való aristotelizmus a mai nagy tudományos átfogó rendszerekben él és nem azoknál, kik a betű szerint való Aristotelest óhajtják feltámasztani.

A Newton-féle fizika is mutatta egy időben a dogmatikus megmerevedés kezdő szimptomáit, de a kutatás már oly széles mederben folyt, az új tények oly állandóan özönlöttek, hogy ez végzetessé nem válhatott.

Galilei tudatában volt annak, hogy vállalkozása kezdet és nem befejezés és az utána következő fejlődés igazolta az általa kijelölt utat.

Mély hálával és hódolattal Galilei géniusza iránt zárom be ezt a megemlékezést.

Ortvay Rudolf.

GALILEI UND DIE ENTFALTUNG DES NEUZEITLICHEN WISSENSCHAFTLICHEN DENKENS.

(ZUR 300. JAHRESWENDE DES TODES VON GALILEO GALILEI).

In einer Einleitung wird das Weltbild des Mittelalters zu schildern versucht. Es wird darauf hingewiesen, das durchaus seelisch-moralische Fragen im Mittelpunkt stehen, und die Natur nur insofern beachtet wird, als es zum metaphysischen Kern der Welt in Beziehung gebracht werden kann. Die Denkweise ist mythisch-analogisch, trotz der aristotelisch-scholastischen Form.

Nach einer kurzen Schilderung des Lebenslaufes von *Galilei* werden seine Hauptverdienste aufgezählt:

Die Bekämpfung der peripatetischen Philosophie, Wiederherstellung eines unmittelbaren Verhältnisses zur Natur, die Forderung des Experimentes und der Beobachtung.

Sein Kampf für die Copernicanische Lehre.

Die Neubegründung der Dynamik, wobei besonders auf seine Beziehungen zur Relativitätstheorie eingegangen wird.

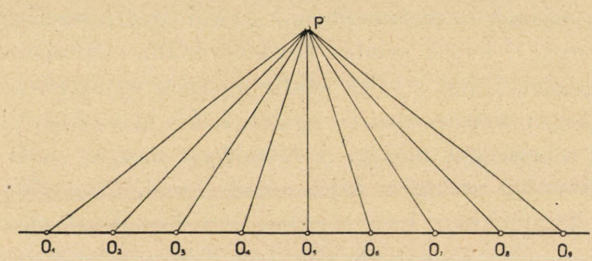
R. Ortvay.

A LÁTSZÓLAGOS MOZGÁS.

Minden mozgás leírásához szükséges egy koordinátarendszer, és a mozgás leírásánál nyert eredmény lényegesen függ ennek megválasztásától. Ha pl. meghatározzuk egy mozgó pont sebességét, mint az idő függvényét, kiszámítjuk pályája egyenletét különböző koordinátarendszerekben, az eredmények egészen eltérőek lehetnek a választott rendszer szerint; ugyanaz a mozgás más koordinátarendszerben egészen másnak «látszik». A mozgásokat többnyire a Földre, esetleg saját testünkre vonatkoztatva írjuk le, és a kapott eredményt «látszólagos» mozgásnak nevezzük. Ilyen értelemben szólunk pl. az égitestek «látszólagos» mozgásáról. Amint látjuk, e kijelentésekben a «látszólagos» csak annyit akar jelenteni, mint «relativ a Földhöz», illetőleg mihozzánk. Pedig nem ártana nagyobb óvatosság a szavak használatában, mert — amint erre Mikola Sándor figyelmeztet könyvében (A fizikai megismerés alapjai, 97. lap) — a látszólagos mozgás általában nem tisztán fizikai, hanem egyszersmind lélektani tünemény is. A következők folyamán mindig ehhez fogunk igazodni; tehát egy bizonyos mozgásnak megadott koordinátarendszerben, tisztán fizikai — vagyis geometriai és időadatokkal történő — leírását rövidség kedvéért *relatív* mozgásnak fogjuk nevezni; ellenben *látszólagos* mozgásról szólva tekintetbe vesszük a lélektani tényezőket és érzékszerveink fiziológiai adottságait is. Esetleges félreértések elkerülése céljából hangsúlyozzuk, hogy a *relatív* jelzőt nem a relativitás-elmélet meghatározása értelmében használjuk; mozgásainkat csupán bizonyos, az észlelés módja által kitüntetett koordinátarendszerekre és nem valamely Galilei-rendszerre vonatkoztatjuk.

Az a mozgás, amelyről szó lesz, a legközönségesebbek egyike: az utazás. Gyalog, kocsin, hajón vagy vonaton utazva egyaránt ugyanazt a megfigyelést tehetjük, legfeljebb nagyobb sebességnél az észlelt tünemények feltűnőbben jelentkeznek. A mi mozgásunk ilyenkor a Földdel kapcsolt koordinátarendszerben egyenesvonalú, egyenletes mozgás valamilyen v sebességgel. Ha a koordinátarendszert a magunk testéhez kapcsoljuk, akkor a környező tájék minden pontjának mozgása ebben a koordinátarendszerben tisztán fizikai adatokkal leírva szintén egyenesvonalú, egyenletes mozgás $-v$ sebességgel. Tehát a tájék *relatív* mozgása egyszerűen az, hogy minden tárgy: távírópózna, fa, épület, felhő, holdvilág stb. ugyanazon $-v$ sebességgel mozog. A *látszólagos* mozgás ettől teljesen eltérő. Látszólag az egész tájék élénk forgó, örvénylő mozgást végez, a közelünkben levő tárgyak haladásunkkal ellenkező, a tőlünk távolesők vele egyenlő irányban. Ebben a forgásban, keringésben még a látóhatár szélén levő tárgyak is résztvesznek, sőt még a látóhatár közelében levő felhők, vagy pl. a lenyugvó Nap, a Hold is. Állónak, nyugalomban levőnek csak akkor látjuk ezeket, ha olyan magasan vannak, hogy külön szemlélhetjük őket, a nélkül, hogy a tájékot is látnánk.

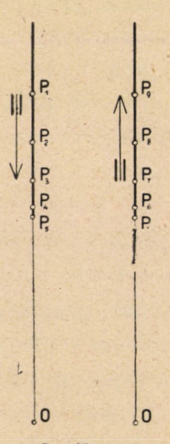
Mi lehet az oka annak, hogy ez a látszólagos mozgás ennyire különbözik a relatív mozgástól? Első és legfőbb oka az, hogy az a koordinátarendszer, amelyben mi a mozgást látjuk, nem a vonattal, illetőleg testünkkel van merev kapcsolatban, mint első pillanatra gondolnók. Mi a tájékot szemünkkel figyeljük meg, de szemünk tengelyének helyzete a haladás irányához viszonyítva változik. Mi az elhaladó táj szemlélésekor szemünket hosszabb-rövidebb ideig mindig valamire, egy pontra szegezzük és szemünk (esetleg fejünkkel és testünkkel együtt) úgy helyezkedik, úgy *forog*, hogy az a pont a sárgafolton maradjon. Tehát szemünk hosszabb-rövidebb ideig tartó forgásokat végez függőleges tengely körül. Vagyis az a koordinátarendszer is, amelyhez a tájék mozgását viszonyítjuk, az illető tájékhoz képest nemcsak egyenes vonalban mozgó, hanem ezenkívül még forgó mozgást is végző koordinátarendszer. Erre, a szemünkkel mereven összekapcsolt rendszerre kell vonatkoztatnunk a tájék mozgását. Mindez áll külön-külön mindkét szemünkre, de mivel két szemünk forgási tengelyének távolsága a szemlélt pontok tőlünk mért távolságához képest elenyésző, a két forgási tengelyt a relatív mozgás meghatározása szempontjából egybeesőnek tekinthetjük. Egyszerűsítsük még jobban a feladatot: írjuk le először is ebben a koordinátarendszerben nem az egész tájéknak, hanem csak a tájék *egy pontjának* mozgását, éspedig legelőször azt vizsgáljuk meg, milyen lesz a relatív mozgása annak a pontnak, amelyre szemünket szegezzük?



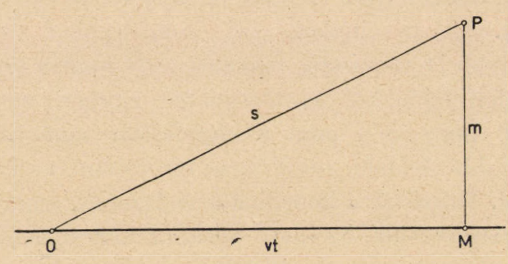
1. ábra.

Legyen a Földdel kapcsolatos koordinátarendszerben a fixált pont P; O_1, O_2, O_3,... pontok jelöljék szemünk helyzeteit egyenlő időközökben (1. rajz). A koordinátarendszer kezdőpontját szemünkbe téve át, egyik tengelynek a PO egyenest választhatjuk. Erre O-ból felmérve az O_1P, O_2P, O_3P,... távolságokat, kapjuk P pont megfelelő P_1, P_2, P_3,... helyzeteit egyenlő időközökben.

Látjuk, hogy e pont relatív mozgása lassuló közeledés, majd a minimális OP_5 távolság elérése után gyorsuló, de mindinkább egyenletessé váló távolodás. A P pontnak ez a relatív mozgása természetesen tökéletesen leírható matematikailag is.



2. ábra.



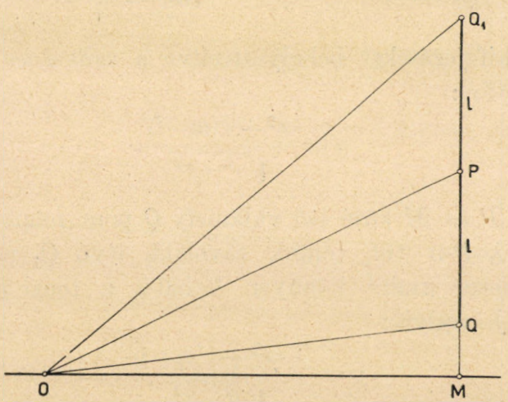
3. ábra.

Pythagoras tételét alkalmazva: $s = \sqrt{m^2 + v^2t^2}$ ahol m jelenti az OP távolság minimális értékét, t az időegységek számát. A grafikus ábrázolás hiperbolát ad; fizikai szempontból csak a gyök + előjele, vagyis csak a hiperbola egyik ága jön tekintetbe. Kiszámítva a P pont sebességét:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{v^2 t}{\sqrt{m^2 + v^2 t^2}} = \frac{v^2}{\sqrt{\left(\frac{m}{t}\right)^2 + v^2}}$$

látjuk, hogy ha $t = \infty$, $\frac{ds}{dt} = \pm v$, vagyis nagy távolságban a P relatív sebessége $\pm v$.

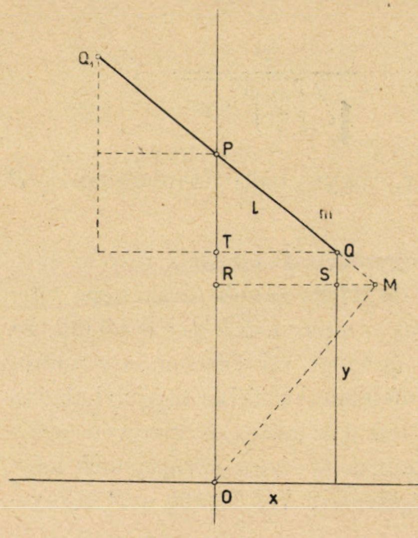
Ez csak *egy* pontnak, a szemügyrevett P pontnak relatív mozgása. De akármilyen kicsi is a sárgafolt, távoli tárgy képe elfér rajta, azután meg a sárgafolt környezetére eső képet is látjuk, ha nem válik is teljesen tudatossá, úgyhogy mi sohasem egy pontot látunk, hanem bizonyos kiterjedésű felületet. Tehát tovább haladva azt kell megvizsgálnunk, milyen lesz a szemünkkel mereven összekapcsolt koordinátarendszerben annak az egész *környezetnek* mozgása, amely a fixált P pontot körülveszi? Válasszunk a P környezetében egy Q pontot.



4. ábra.

Hogy feladatunkat egyszerűbbé tegyük, legyen a PQ egyenes merőleges utunk irányára; ilyen pl. egy útszakasz, fasor vagy csak a P és Q pontoknak megfelelő két fa és azokat képzeletben összekötő egyenes. A fixált P pont mozgását már ismerjük. Most a tőle l távolságban levő Q pontét keressük.

Evégből O pontba helyezzük a koordinátarendszer kezdőpontját, OP lesz a koordinátarendszer egyik tengelye, a másik erre merőleges; Q koordinátái x és y. A Q pont pályáját a következő geometriai összefüggésből kapjuk:



5. ábra.

$$RM^2 = OR . PR =$$
$$= (y - QS)\sqrt{m^2 - RM^2};$$

QS és RM még kifejezendők x-szel és y-nal:

$$QS : PT = (m-l) : l,$$

de mivel

$$PT = \sqrt{l^2 - x^2},$$
$$QS = \frac{m-l}{l}\sqrt{l^2 - x^2},$$
$$RM : x = m : l,$$
$$RM = \frac{m}{l} x.$$

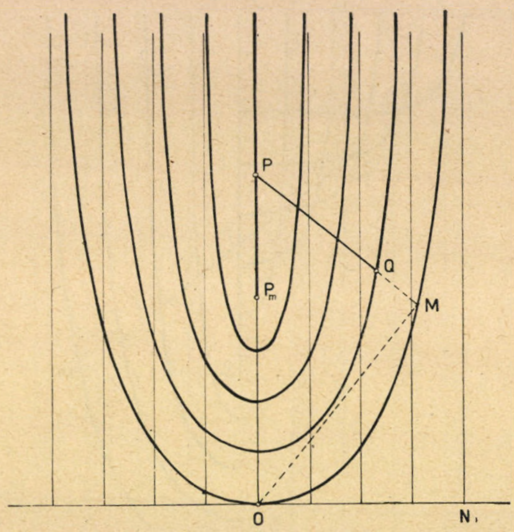
Ezeket a kifejezéseket behelyettesítve a szükséges átalakítások elvégzése után:

$$y = \frac{x^2 + l(m-l)}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

Ez tehát a P és M közé eső valamely Q pont relatív pályájának egyenlete. A P-n túl, tőlünk távolabb levő Q_1 pont pályájának egyenlete, amint könnyen látható, a fenti y megnövelve $2\sqrt{l^2 - x^2}$-tel, vagyis:

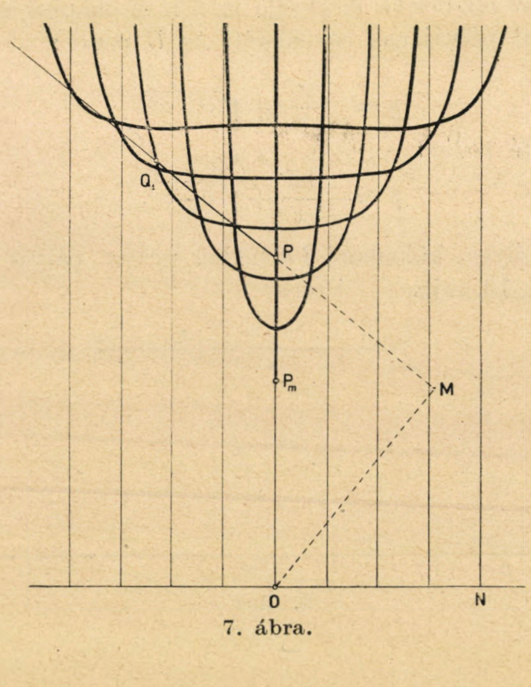
$$y = \frac{-x^2 + l(m+l)}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

m-et és l-et parametereknek tekintve kapjuk különböző m távolságban levő fixált pontoktól l távolságban levő környezeti pontok relatív pályáit. Néhány ilyen, különböző l értékhez tartozó pályát tüntetnek fel a 6., 7., 8. számú rajzok; a 8. a Q és Q_1 pályáit együttesen mutatja abban a pillanatban, amikor P a minimális m távolságba érkezett.

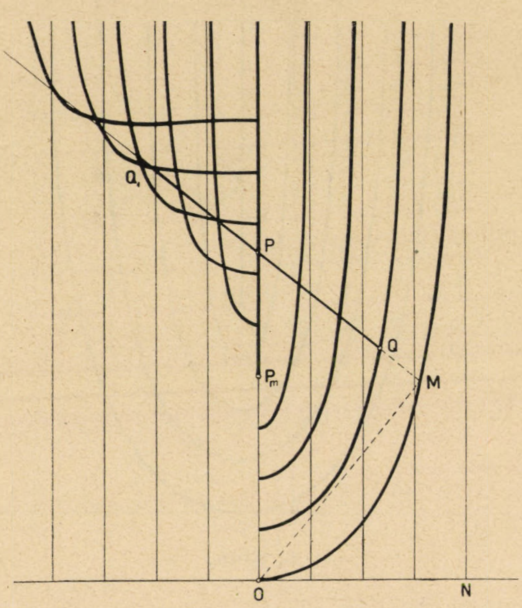


6. ábra.

Teljesség kedvéért válasszunk még két pontot úgy, hogy P-től jobbra és balra legyenek utunkkal párhuzamos egyenesen.



7. ábra.



8. ábra.

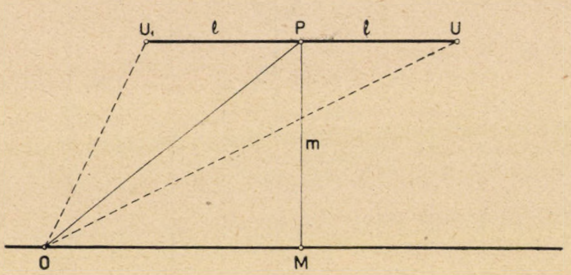
Az előbbi eljárásnak megfelelő módon megkapjuk az U, illetőleg U_1 pont pályájának egyenletét. Az U ponté:

$$y = \frac{ml}{x} \pm \sqrt{l^2 - x^2},$$

az U_1 ponté pedig:

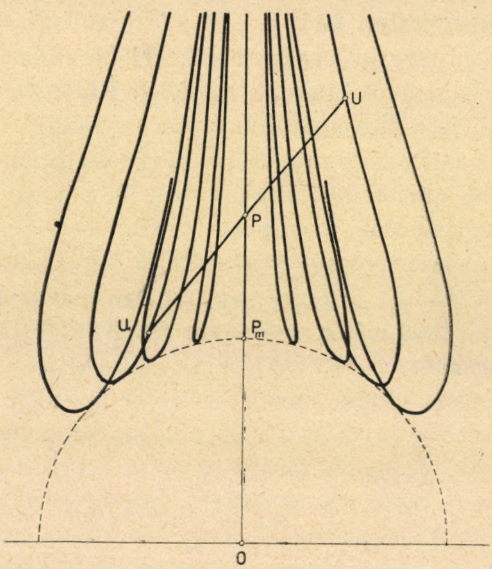
$$y = -\frac{ml}{x} \mp \sqrt{l^2 - x^2}.$$

Néhány ilyen, különböző l értékhez tartozó pályát együttesen tüntet fel a 10. rajz.



9. ábra.

Ezek a hajtűalakú pályák jól mutatják, hogy a P pont környezetének relatív mozgása egyidejű haladó és forgó mozgásból tevődik össze. Ez a mozgás különösen jól figyelhető meg, amikor pl. moziban a felvevőgép előtt egyenes úton elhaladó autót, tankot látunk, amelynek képét állandóan ráirányzott géppel vették fel. Az állandóan a mozgó tárgy felé forduló felvevőgép szemünknek



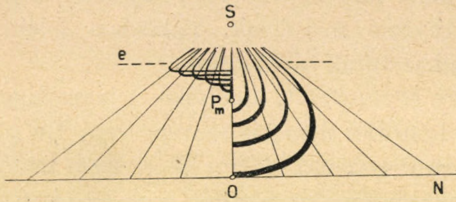
10. ábra.

felel meg. Hogyha hosszabb ideig tartó ilyen felvételt szemlélhetnénk, akkor talán — egy kis autoszuggesztió segítségével — felébredne bennünk a vonaton utazás illúziója.

Az ilyen módon leírt relatív mozgástól a látszólagos mozgás nagy mértékben eltér. Mindenekelőtt a haladó (hozzánk közeledő, illetőleg tőlünk távolodó) mozgás nem figyelhető meg úgy, mint a relatív mozgás vizsgálata feltünteti. A P pont közeledése egyáltalában nem látszik lassulónak, sem távolodása gyorsulónak; sőt éppen megfordítva: látszólagos sebessége legnagyobb akkor, amikor előttünk elsuhan, tehát közeledését ítéljük gyorsulónak és távolodását lassulónak. Mert mi tulajdonképpen nem is úgy látjuk, hogy a szemügyre vett pont az őt velünk összekötő egyenes mentén mozog; ennek észrevételében megzavar annak tudása, hogy a *P* pont utunktól állandó távolságban marad, mozgását nem magunkra, illetőleg szemünkre, hanem utunk irányára vonatkoztatjuk és azzal párhuzamosnak ítéljük.

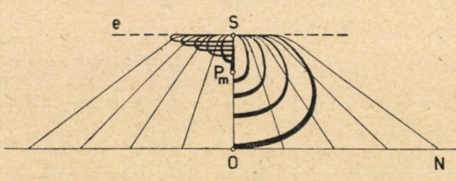
De még más okok is közrejátszanak abban, hogy a *P* pont látszólagos sebessége eltér a relatív sebességétől. Egyik az, hogy a tájékot *perspektivában* látjuk, ami miatt különösen a nagyobb távolságban levő tárgyak egymáshoz közelebb esőknek látszanak, mint az valóságos távolságuknak megfelel. Különösen vonatkozik ez a megállapítás a látósugár irányában egymástól való távolságukra, amely a tárgyak szemünktől való távolságának növekedésével mindinkább zsugorodik. Emiatt távoli pontok mozgásának sebességét a valóságosnál kisebbnek ítéljük, sőt — és ez a másik ok — tőlünk messze levő két pontnak a látósugár irányában egymástól való távolságát bizonyos határon túl már nem is érzékeljük. Körülbelül 1300 méter az a határ (A. König: Die Fernrohre u. Entfernungsmesser, 47. lap), amelynél *mélység-észrevevésünk* megszűnik. Vagyis tőlünk ennél messzebb levő két tárgynak a látósugár irányában egymástól való távolságára legfeljebb következtetni tudunk, pl. abból, hogy egyik a másikat elfedi, vagy látószögeik viszonyából, ha egyébként valóságos nagyságuk felől tájékozva vagyunk; ha pl. tudjuk, hogy két torony egyenlő magas, de az egyiket kisebbnek látjuk, akkor teljes biztossággal következtetünk arra, hogy távolabb van tőlünk, mint a másik, amelyet nagyobbnak látunk. Valamely tárgynak közeledő vagy távolodó mozgását is csak a mélység-észrevevés határán belül tudjuk közvetlenül megfigyelni, e határon túl a radiális irányban mozgó tárgyat állónak látjuk és közeledésére vagy távolodására csak következtetünk abból, hogy látszólagos nagyságának látószöge hogyan változik: látszólagos növekedéséből közeledésre, kisebbedéséből távolodásra következtetünk. Mindezekből folyólag tehát, ha a mélység-észrevevés határán túl eső tárgyakat figyelünk, miközben feléjük közeledünk, ezek látszólag csak a látósugárra merőlegesen egymástól távolodó mozgást végeznek; amikor pedig tőlük távolodunk, egymáshoz közelednek. Mivel ilyen módon a látósugártól, illetőleg a szemügyre vett ponttól is távolodnak, majd hozzá közelednek, látszólagos mozgásuk hozzájárul a forgás, örvénylés káprázatának keltéséhez.

Ezeket a viszonyokat akarja szemléltetni a 11. kép, amely a 8. rajzot tünteti fel perspektivában. Azonban a tényleges méretek arányát meg kellett változtatni az ábrázolhatóság céljából.



11. ábra.

Ha például vonaton utazunk, szemünk — mondjuk — 5 méter magasan van a tájék szintje fölött. Ha szemünket a pályától 400 méter távolságban levő pontra szegezzük, az 5 m ennek 80-ad része. E szerint az *OS* és *ON* távolságoknak is ebben az arányban kellene állaniok, de akkor a képet nem lehetne megrajzolni úgy, hogy látni is lehessen valamit rajta. Ezért a rajz azt az esetet tünteti fel, amikor 400 m távolságban levő pontra irányítjuk szemünket a tájék szintje felett 300 m magasságból; vagyis ilyen volna a relatív mozgás perspektivája pl. repülőgépen utazó számára. Az *e* szaggatott vonal *O*-tól kb. 1300 m-re van, ezen túl a mélység-észrevétel megszűnik, a rajznak e vonalon túl eső részét, a pontok pályáit csak erre a vonalra, illetőleg ezen átmenő függőleges síkra[1] vetítve látjuk. A zsúfoltság elkerülése végett a rajz — éppúgy, mint a 8. ábra — az *MP* egyenes pontjainak relatív mozgását csak addig az időpontig adja meg, amíg az utas balról jobbra haladva a végtelenből az *M* pontba érkezik. A *P* pont tehát éppen a minimális távolságban van az *O* ponttól. A rajz másik fele természetesen ezzel szimmetrikus volna. Ha még tekintetbe vesszük a mélység-észrevevés megszűnését is, akkor a rajz a 12. ábra szerint átalakul; az *e* vonalon túl levő rész megrövidül, összezsugorodik.



12. ábra.

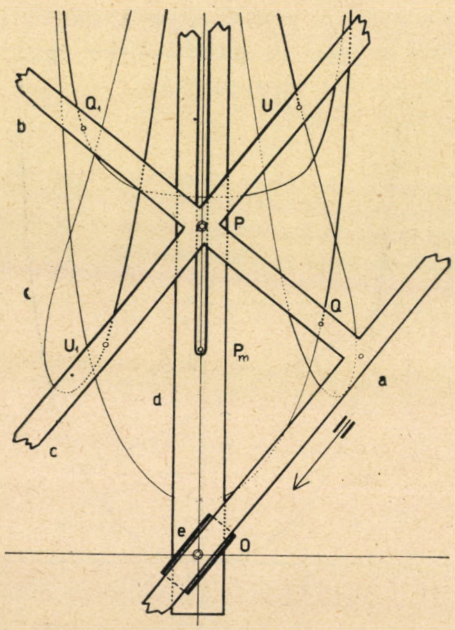
[1] Szigorúan véve gömbfelületre.

Tehát ez a rajz tünteti fel végre a tájék látszólagos mozgását, megegyezően a megfigyelhető örvénylő, forgó mozgással, amely szerint a tájék pontjai a fixált P pont körül keringenek, legalább is akkor, amikor a P pont már elég közel van. T. i. a P-n túl eső pontok akkor, amikor a P pont még messze van, egy ideig ezzel a keringéssel ellenkező irányban mozognak, miközben feléjük közeledünk, és akkor is, amikor tőlük távolodunk.

Meg kell említeni még egy körülményt, amelynek a látszólagos forgó mozgás előidézésében biztosan nem kis szerepe van. Ha pl. egyik ujjunkat kinyujtott karral szemünk előtt a látósugárra merőlegesen mozgatjuk és közben mindig rája nézünk, a szoba tárgyai látszólag ellenkező irányban mozognak. Éppen így a P ponttól felénk eső pontok intenzív mozgása látszólag, az ellentét miatt, erősíti a P-n túl levő pontok ellenkező irányú lassú mozgását. Ez az erős kontraszt okozza azt is, hogy ha a látóhatáron levő pontra irányítjuk szemünket, ha tehát a P ponton túl már nincsenek tárgyak, akkor maga ez a szemügyre vett pont is résztvesz a forgásban, éspedig úgy mozog, mint egyébként a P-n túl levő pontok, vagyis a közelebb eső pontokkal ellenkező irányban. Ha a P-t közelebb választjuk, mindig megfigyelhetjük azt, hogy a P a forgás centruma, hogy a tájék a P körül forogva lassan elmarad, de ha a P-t a látóhatárra helyezzük, akkor a forgás középpontja látszólag — de meghatározhatatlan helyen — valahol közelebb van. Hogy minden más esetben a forgás középpontja a szemügyre vett pont, arról nagyon egyszerűen meggyőződhetünk a következő kísérlettel. Szemeljünk ki három pontot, úgyhogy helyzetük olyan legyen, mint pl. a 4. rajzon a Q, P, Q_1 pontoké. Ha feléjük közeledve a Q-t fixáljuk és a P-re figyelünk, P a Q körül velünk egy irányban haladva forog; ha szemünkkel Q_1-re ugrunk át és ezt fixálva figyeljük a P-t, akkor a P mozgása rögtön ellenkező irányúvá válik, vagyis velünk ellenkező irányban haladva forog a Q_1 körül. Különösen feltűnő és meglepő a P pont mozgásának ez a megváltozása P_m helyzetében, és ha a Q és Q_1 pontokat gyors egymásutánban vesszük szemügyre.

Eddig mindig arról volt szó, hogy haladás közben oldalirányban tekintünk. Nyilvánvaló, hogy a relatív mozgás ugyanilyen lesz akkor is, ha felfelé vagy lefelé nézhetünk. Minden valószínűség szerint a látszólagos mozgás is egyezni fog a fentiekben leírttal. Ha fák alatt, házak mellett haladunk felfelé nézve, tapasztalhatjuk a látótér forgását vízszintes tengely körül. Repülőgépről, Zeppelinről letekintve bizonyára ugyanezt tapasztaljuk, ameddig nem vagyunk olyan magasságban, amelyből a Földfelszín függőleges tagoltsága már észrevehetetlenné válik.

Azt hiszem, ezen a példán sikerült kimutatni azt a különbséget, ami a relatív és a látszólagos mozgás között van. De egyúttal



13. ábra.

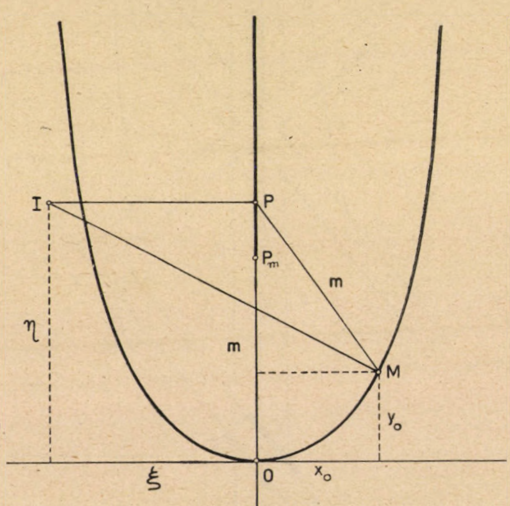
látjuk a kettő kapcsolatát is, t. i. hogy a látszólagos mozgásnak alapja a relatív mozgás. Ez azonban fiziológiai és lélektani körülmények hatására felfogásunkban átalakul, módosul. Az átalakulás eredménye a látszólagos mozgás.

Az itt tárgyalt relatív mozgásokat végző pontok pályáit egyszerű szerkezet segítségével is meg lehet rajzolni.

O jelenti az *e* kulissza forgási tengelyét. Ebben az *e* kulisszában csúszik az *a* léc, amelyhez derékszögben illeszkedik a *b* léc. Ennek

P pontjából pecek nyúlik a d léc kivágásába. Az a lécet a nyíl irányában csúsztatva a b és c léc pontjai a tárgyalt görbéket írják le.

Ezeket a görbéket és egyáltalában a tájék bármely más pontjának relatív pályáját még más módon is megkaphatjuk. Ismeretes kinematikai tétel, hogy merev rendszer minden sík mozgása a rendszerrel mereven egybekapcsolt gördülő-görbének a síkjában fekvő alapgörbén, a momentán centrumok görbéjén történő gördülésével létesíthető (Fröhlich: Kinematika 262. lap). Gördülés közben a merev rendszer minden pontja egy-egy ruletta-görbét ír le. A fentiekben ábrázolt görbék egyes kiszemelt pontok rulettái. Ezek segítségével az alap- és gördülő-görbét meg lehet határozni. Erre a célra két rulettát szemelünk ki:



14. ábra.

Az egyik az y tengelynek $+m$-től a végtelenig terjedő része, a másik az $y = \frac{x^2}{\sqrt{m^2 - x^2}}$ görbe. Az egyiket az m távolság P, a másikat M végpontja írja le (lásd a 6. rajzot). E ruletták két-két összetartozó pontjához — t. i. az m távolság egyidejű végpontjaihoz — szerkesztett normálisok I (ξ, η) metszéspontjainak, vagyis a momentán centrumoknak mértani helye az alapgörbe. A P ponthoz tartozó normális egyenlete:

$$y = y_0 + \sqrt{m^2 - x_0^2},$$

a M (x_0, y_0) ponthoz tartozóé:

$$y = y_0 - \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_0}(x - x_0),$$

ahol

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{x_0(2m^2 - x_0^2)}{(m^2 - x_0^2)\sqrt{m^2 - x_0^2}}.$$

A két normális egyenletével felírt egyenletrendszer megoldása:

$$\xi = \frac{-m^2 x_0}{m^2 - x_0^2},$$

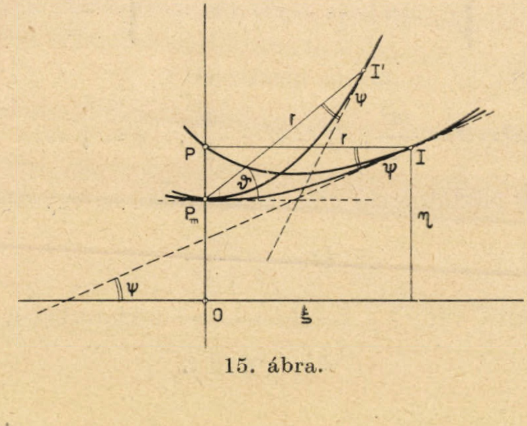
$$\eta = \frac{m^2}{\sqrt{m^2 - x_0^2}}.$$

Ezek az alapgörbe parameteres egyenletei. x_0-t kiküszöbölve kapjuk az alapgörbe egyenletét explicit alakban:

$$\eta = \sqrt{\frac{m^2}{2} + m\sqrt{\frac{m^2}{4} + \xi^2}}.$$

A belső gyöknek csak a pozitív előjele ad reális értékeket, a külső gyöknek pedig csak a pozitív előjelére van szükségünk; a negatív előjel utunk másik oldalára vonatkozik.

Hogy a gördülő-görbe egyenletét is megkapjuk, — polárkoordinátákban — válasszuk kezdőpontnak a P_m pontot. A gördülő-görbe valamely tetszésszerinti I' pontjának koordinátái r és ϑ. A I' ponthoz tartozó érintő a radius-vektorral ψ szöget zárjon be.



15. ábra.

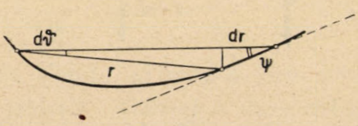
Ha a gördülő-görbe ebből az alaphelyzetből kiindulva a rajzon ábrázolt azon helyzetbe jut, amelyben az I' pont az alapgörbe I pontjára esik, akkor $r=\xi$-vel, az I pont abscissájával, mert ekkor I lévén a momentán centrum, PI-nek merőlegesnek kell lennie a P pont rulettájára. De ez a ruletta maga az y tengely (P_m-től a ∞-ig). Ugyanekkor a gördülő-görbe I' pontjához vonható érintő egybeesik az alapgörbe I pontjának érintőjével, tehát

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{d\eta}{d\xi}$$

a $\xi = r$ helyen. A differenciálást elvégezve

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{mr}{\sqrt{2m\left(\frac{m^2}{4}+r^2\right).\left(m+2\sqrt{\frac{m^2}{4}+r^2}\right)}}.$$

A 16. rajzból közvetlenül látható, hogy $r.d\vartheta = dr.tg\psi$ (Fröhlich: Kinematika 267. lap).



16. ábra.

Ezt alkalmazva nyerjük a gördülő-görbe differenciálegyenletét elkülönített változókkal:

$$d\vartheta = \frac{m.dr}{\sqrt{2m\left(\frac{m^2}{4}+r^2\right).\left(m+2\sqrt{\frac{m^2}{4}+r^2}\right)}}.$$

Ez az egyenlet az önként kínálkozó

$$r^2 = t^2 - \frac{m^2}{4}, \quad t = u^2 + \frac{m}{2}, \quad u = \sqrt{m}.z$$

substitutiók folytatólagos alkalmazása után az egyszerű

$$d\vartheta = \frac{dz}{1+z^2}$$

alakra hozható, vagyis a kezdőértékeket tekintetbevéve

$$\vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} z.$$

A helyettesítéseket megfordított sorrendben elvégezve

$$\vartheta = \text{arc tg}\sqrt{\sqrt{\left(\frac{r}{m}\right)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}}$$

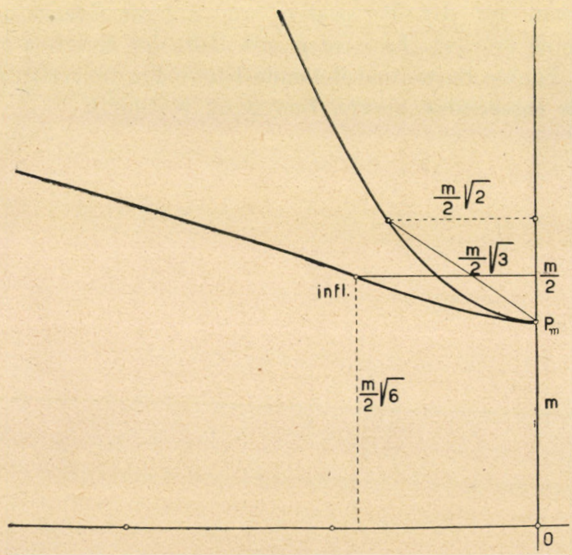
eredményre jutunk, amelyből

$$r = m \operatorname{tg} \vartheta . \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta}\,.$$

Derékszögű koordinátákra áttérve és a P_m pont választásának módját tekintetbe véve

$$y = \frac{1}{m} x^2 + m$$

a gördülő-görbe egyenlete. Vagyis ez a görbe parabola. Ennek és az alapgörbének egyik felét mutatja a 17. rajz. A görbék másik



17. ábra.

fele természetesen ezzel szimmetrikus. A relatív mozgás kinematikailag teljesen le van írva, ha úgy képzeljük, hogy a tájék mereven kapcsolódik a vízszintes síkú gördülő parabolához, amely az ugyanazon vízszintes síkban fekvő, szemünkhöz és az *OP* látósugárhoz változatlan helyzetű alapgörbén haladásunk irányában gördül. A *relatív* mozgás folyton változó forgási pontja tehát ezen az alapgörbén mozog. A *látszólagos* mozgásban a forgás állandóan a fixált P pont körül történik. A kétféle mozgás szerinti forgási centrum csak egy pillanatban esik egybe: amikor a P pont P_m-ben, a minimális távolságban van.

E dolgozat megírására MIKOLA SÁNDOR idézett könyve 97. lapjának utolsó bekezdése adott indítékot.

Kilczer Gyula.

DIE SCHEINBARE BEWEGUNG.

Es wird der Unterschied und Zusammenhang der kinematisch beschriebenen und der «scheinbaren» Bewegung am Beispiel der während des Reisens beobachtbaren scheinbaren Bewegung der Landschaft mit Rücksicht auf die Perspektive und auf die Grenze der Tiefenwahrnehmung erörtert. Es werden mit Hilfe der Ruletten zweier ausgewählten Punkte Basis- und Rollende-Kurve der die relativen Bahnen der Punkte ergebenden ebenen Bewegung bestimmt.

Julius Kilczer.

AZ INTERSZTELLÁRIS ANYAGOK FÉNYGYENGÍTÉSE.

1. §. A Tejútrendszer szerkezetének vizsgálatában rendkívül nagy nehézséget okoz, hogy a csillagok közt levő tér, legalább is a Tejút síkja mentén, nem üres. A szerint, hogy az intersztelláris anyagok által okozott fénygyengítés milyen erős, a sztellárstatisztika módszereinek alkalmazásával, ugyanabból a megfigyelési anyagból is, a csillagok térbeli eloszlására igen eltérő értékeket kapunk. Fokozza a nehézséget az intersztelláris anyagok egyenlőtlen eloszlása. A Naprendszer körül már néhány száz parszek távolságon belül igen sok ú. n. sötét ködöt ismerünk, amelyekben a fénygyengítés különösen erős. Ezeknek a ködöknek a távolságát, átmérőjét, a fénygyengítésük mértékét különböző sztellárstatisztikai módszerekkel meg lehet határozni szomszédos, ilyen ködöktől mentes tájakkal való összehasonlítás útján. De szükséges volna azt is tudni, van-e egyáltalán fénygyengítés az ilyen sötét ködöktől mentes irányokban is és ha igen, milyen erős az. Ebből a célból a megfigyelési anyagban szét kell választani a sötét ködökben levő égitesteket a normális vidékekben levőktől.

A Naprendszertől nagyobb távolságra levő égitestek, mint a gömbhalmazok, a δ Cephei-csillagok, a bolygószerű ködfoltok stb. térbeli eloszlásának vizsgálatában, a sötét ködök nagy térbeli sűrűsége miatt már folytonosan eloszló fénygyengítő réteggel számolhatunk. Első közelítésben — és ma még csak itt tartunk — az intersztelláris anyagok eloszlását a Tejút síkja mentén bizonyos rétegen belül egyenletesnek tételezzük fel és kereshetjük a fénygyengítés átlagos értékét. Minthogy a csillagok fényességét túlnyomórészt fotográfiai úton határozzák meg, elsősorban az itt számbajövő sugaraknak gyengülését kell meghatároznunk. A nemzetközileg elfogadott csillagászati fotográfiai fényességskála effektív hullámhossza 4250 Å és a különböző megfigyelési anyagból nyert értékeket erre a hullámhosszra kell átszámítani.

A fénygyengítés mértékének meghatározására a csillagok geometriai úton meghatározott távolságait kell összehasonlítani az ú. n. fotometriai távolságukkal. Az utóbbit, ϱ-t, parszekben kifejezve, a látszólagos fényrend, m és az abszolút fényrend, M ismeretével[1] az intersztelláris fénygyengítés elhanyagolásával az

$$5 \log \varrho = m - M + 5 \qquad (1)$$

képlet alapján kapjuk, amely egyszerűen a fényintenzitásnak a távolság négyzetével való csökkenését fejezi ki. A geometriai úton kapott távolságokat nem hamisítja meg az intersztelláris fénygyengítés és ha α-val jelöljük a fotográfiai fénygyengítés koefficiensét, amelyen az egy kiloparszekre eső fénygyengítést értjük fényrendben kifejezve,[1a] akkor a csillag valódi távolsága, r, szintén parszekben kifejezve, így függ össze ϱ-val:

$$5 \log r + 0{\cdot}001 \alpha r = 5 \log \varrho. \qquad (2)$$

Ebből a formulából, ha ismerjük ϱ-t és r-t, kiszámíthatjuk α-t.

Teljesen exakt módon α-t csak olyan csillagok segítségével lehetne meghatározni, amelyeknek trigonometriai parallaxisát megmértük és abszolút fényességüket valamikép az intersztelláris fénygyengítéstől független módon ismerjük. Csakhogy a trigonometriai parallaxisok mindössze 60 parszeken belül tekinthetők kielégítően pontosaknak. Tovább mehetünk bizonyos csillagcsoportokra a sajátmozgásokból levezethető szekuláris parallaxisok révén, de ez a módszer már nem mentes feltevésektől és különben is kellő pontosságú sajátmozgások is csak a 7. rendnél fényesebb csillagokra állnak rendelkezésünkre. Meg kell tehát elégednünk kevésbbé szigorú módszerekkel.

---

[1] A csillagászatban használatos fényrendskála az intenzitás logaritmusát adja éspedig úgy, hogy öt fényrendkülönbség éppen 100-szoros intenzitásviszonynak felel meg. Abszolut fényrenden a 10 parszek távolságra redukált fényrend értendő. 1 parszek = 3·26 fényév.

[1a] Az irodalomban α-t az intersztelláris abszorpciókoefficiensnek nevezik. A kifejezés helytelen, mert az intersztelláris anyagok okozta fénygyengítés nemcsak abszorpció, hanem nagyrészben fényszórás útján áll elő.

Sajnos, a különböző módszerek útján α-ra kapott értékek nagyon eltérnek egymástól. Nem számítva néhány igen bizonytalan megfigyelési anyagon alapuló vizsgálatot, az α-ra kapott értékek 0·6 és 2·0 között váltakoznak. Többen megvizsgálták, hogy a felhasznált megfigyelési anyag milyen szisztematikus hibái járulhatnak hozzá ezekhez a nagy eltérésekhez, de ezek figyelembevételével sem sikerült összhangba hozni az eredményeket.

Az alábbiakban kimutatjuk, hogy a nagy eltéréseket nemcsak a megfigyelési anyag szisztematikus hibái okozzák, hanem nagy mértékben a véletlen megfigyelési hibák is. Ha ezt a körülményt még több, eddig figyelmen kívül hagyott szisztematikus hibával együtt tekintetbe vesszük, a különböző módszerekkel nyert eredmények közt levő ellenmondásokat sikerül megmagyaráznunk és eltüntetnünk.

2. §. Az α meghatározására alkalmazott módszerek közül a legkielégítőbbnek Joy módszerét kell tartanunk, amely a Tejútrendszer forgásának elméletét használja fel a geometriai távolság meghatározására.[2] Joy 157 δ Cephei-csillag radiális sebességét határozta meg és vizsgálta a radiális sebességekben mutatkozó rotációs effektusnak[3] változását az e csillagokra érvényes periódusfényesség-összefüggés alapján kiszámítható fotometriai távolságokkal. Minthogy ezeknél az intersztelláris fénygyengülés nincs tekintetbe véve, a rotációs effektus, $\bar{\varrho}A$ nem nő lineárisan a távolsággal, mint az elmélet megköveteli, hanem sokkal lassabban. Az 1. táblázatban az első négy oszlop mutatja Joy eredményeit. A csillagokat Joy a fotometriai távolságuk szerint négy csoportba osztotta, figyelmen kívül hagyva kis számuk miatt a 10 000 parszek-

---

[2] A. H. Joy: Rotation effects, interstellar absorption and certain dynamical constants of the galaxy determined from Cepheid variables. Astroph. Journ. **89**. 356—76. 1939 és Mount Wilson Contr. No. 607. 1939. Előzetes közlemény: Mt. Wilson Report 1932—33. p. 156.

[3] A Tejútrendszer forgásából következik, hogy $\bar{r}$ átlagos távolságban levő csillagok radiális sebessége, V a galaktikai hosszúsággal, λ-val így függ össze:

$$V = \bar{r}A \sin 2(\lambda - \lambda_0),$$

hol λ_0 a forgás centrumának galaktikai hosszúsága, A az ú. n. rotációs konstans.

1. táblázat.

Fot. távolság	ν	$\bar{\varrho}$	$\bar{\varrho}A$	ν'	$\bar{\varrho}'$	$(\bar{\varrho}A)'$
130— 910 ps	35	520	10·4	35	520	10·4
950—2400 «	33	1156	22·7	36	1550	20·5
2510—4170 «	34	3200	38·9	37	3080	37·5
4370—9850 «	26	5560	37·7	31	5730	35·4

nél távolabbi csillagokat. ν jelöli a csillagok számát az illető csoportban, $\bar{\varrho}$ a közepes fotometriai távolságukat, $\bar{\varrho}A$ a rotációs effektust. Mint láthatjuk, a tényleg nem nő lineárisan a távolsággal. Joy szerint, ha a-ra 0·85 értéket veszünk és a távolságokat (2) szerint korrigáljuk, egyezést lehet az elmélettel elérni.

Ezt az értéket azonban csak minimális értéknek szabad tekinteni, mert Joy a meghatározásánál kihagyott 11 olyan δ Cephei-csillagot, amelyek igen erősen fénygyengítő ködökben vannak. Pedig ha az intersztelláris fénygyengülés átlagos értékét akarjuk tudni, akkor nem szabad ezt a szelekciót tennünk. Ezért kiszámítottam a megfelelő értékeket a Joy által kihagyott 11 csillag bevonásával és az így kapott adatokat az 1. táblázatba ν', $\bar{\varrho}'$, $(\bar{\varrho}A)'$ alatt tüntettem fel. A rotációs effektus növekedése a távolsággal természetesen most még lassúbb. A lineáris menet előállítására számításom szerint $a = 0{\cdot}94$ értéket kell vennünk.

A valódi érték még ennél is nagyobb lehet valamivel, mert á ltozócsillagok után általában nagyobb előszeretettel kutatnak csillagdús tájakon, úgyhogy az eddig felfedezett δ Cephei-csillagok kisebb arányban fordulnak elő a sötét ködökben, mint a sötét ködök kiterjedéséből várni lehetne. Azonfelül a nagyon gyenge csillagok radiális sebességét nem lehet meghatározni és mivel a sötét ködökben levő változócsillagok általában gyengébbek, mint a többiek, Joy anyagában még inkább eltolódhat az arány. Abból a célból, hogy fogalmunk legyen ennek a szelekciónak mértékéről, megvizsgáltam egyrészt a Joy által felhasznált, másrészt a ma ismeretes többi δ Cephei-csillag eloszlását a sötét ködökhöz képest. Ebben és az alábbi hasonló vizsgálatokban, használhatóságuk sorrendjében, a következő tejútfelvételeket használtam fel:

E. E. Barnard: A Photographic Atlas of Selected Regions of the Milky Way. Carnegie Publ. No. 247. 1927.

F. E. Ross: Atlas of the Milky Way. Chicago, 1935.

M. Wolf: Die Milchstrasse. Verlag «Die Sterne». 1925.

J. Palisa u. M. Wolf: Photographische Sternkarten.

S. J. Bailey: The Northern Milky Way. Harvard Ann. **80**. No 4. 1916.

A déli Tejútra pedig:

J. Franklin-Adams: Stellar Photographs. Mem. Roy. Astr. Soc. **60**. III. 1913.

Cape Union Observatory Charts. 1926—38.

S. J. Bailey: The Southern Milky Way. Harvard Ann. **72**. No 3. 1913.

S. J. Bailey: Nebula Surrounding η Carinae. Harvard Ann. **60**. No 8. Plate IV.

A Joy által felhasznált 156 δ Cephei-csillag közül vizsgálatom szerint 20 van sötét ködben, 13 pedig ilyen ködök szélén. Tehát e csillagok 21%-a van valamikép sötét ködökkel összeköttetésben, holott a sötét ködök kiterjedése után ítélve legalább 34%-uknak kellene ilyen tulajdonságúaknak lenniök. Az 1939. évi babelsbergi változócsillag-jegyzékben felsorolt 249 δ Cephei-csillag közül 44 van sötét ködben, 28 pedig sötét köd szélén, még mindig kevesebb, mint a sötét ködök eloszlásából várni lehetne, de aránylag 8%-kal több, mint Joy anyagában.

Ennek a szelekciónak hatását α értékére durván megbecsülhetjük abból a különbségből, amely a Joy által számított és elébb a 11 sötét ködben levő csillag bevonásával kapott érték között fennáll. Ezek szerint α legvalószínűbb értékének 1·02 veendő.

van Rhijn, ugyancsak a rotációs effektus alapján, nyílthalmazok radiális sebességéből $\alpha = 1{\cdot}06$ értéket kapott,[4] de anyaga mindössze 9 radiális sebesség és fotometriai távolságadatból áll. A 9 halmaz közül 5 sötét ködben vagy sötét köd szélén van és így van Rhijn értéke kissé magasnak tekinthető, ha ilyen kis anyagból egyáltalán elfogadható értéket lehet kapni.

---

[4] van Rhijn: The absorption of light in interstellar space and the galactic density distribution. Kapteyn Astr. Lab. Publ. Groningen. No 47. 1936.

Berman 111 bolygószerű ködfolt radiális sebességéből $\alpha = 0{\cdot}76$ értéket kapott.[5] Ez a kis érték azonban könnyen megmagyarázható. A bolygószerű ködfoltok galaktikai koncentrációja sokkal kisebb, mint a δ Cephei-csillagoké és igen sok közülük már kívül van az intersztelláris anyagok rétegén. Ha elfogadjuk a réteg vastagságára az extragalaktikák eloszlásából kapott eredményeket és a rétegen kívül levő ködöket — számra nézve 17-et — kihagyjuk α értékének meghatározásában, akkor számításom szerint $\alpha = 0{\cdot}92$ adódik.

Így tehát a Joy-féle módszerrel történt meghatározások α-ra igen jó megegyezésben vannak egymással. A bolygószerű ködfoltokból adódó értéket fél, a nyilthalmazokból adódót pedig ötöd súllyal véve, a Tejútrendszer forgásán alapuló számítások legvalószínűbb középértékéül $\alpha = 0{\cdot}99$-ot kapunk.

3. §. Ennél lényegesen kisebb értékhez vezet Trümpler módszere.[6] Trümpler 100 nyilthalmaz fotometriai távolságát a halmazokban levő csillagok spektrumából határozta meg, azután a halmazok látszólagos átmérőjéből és a fotometriai távolságukból kiszámította a halmazok valódi átmérőjét. Eredményei szerint a halmazok átmérője erősen nő a távolsággal és ez szerinte csak az intersztelláris fénygyengítéssel magyarázható meg. Az átmérőnek a távolsággal való növekedése Trümpler számításai szerint megszüntethető, ha a fotometriai távolságokat (2)-ben $\alpha = 0{\cdot}67$ értéknek megfelelőleg korrigáljuk. Trümpler nemrég újabb adatokkal megismételte számításait,[7] eredménye $\alpha = 0{\cdot}70$, alig tér el a régitől.

Trümpler módszere ellen már több kritika hangzott el, főleg Ten Bruggencate és W. Becker részéről.[8] Becker szerint a halmazátmérőknek a távolsággal való növekedése csak azon halmazoknál mutatkozik, amelyek sötét ködben vannak és így szerinte

---

[5] L. Berman: A study of the galactic rotation from the data of the planetary nebulae. Lick Obs. Bulletin No. 486. 1937.

[6] R. J. Trümpler: Preliminary results on the distances, dimensions and space distribution of open star clusters. Lick Obs. Bull. 420. 1930.

[7] R. J. Trümpler: Galactic star clusters. Astroph. Journ. **91**. 186. 1940.

[8] Összefoglalóan lásd W. Becker: Materie im interstellaren Raume. Fortschritte der Astronomie. Bd. **1**. S. 29—32. 1938.

Trümpler eredményeiből nem lehet általános összefüggő fénygyengítő közegre következtetni. Erre én már 1932-ben rámutattam.[9] Számításaimban a látszó halmazátmérőkre Lundmark és Collinder igen homogén adatait használtam fel.[10] Először kiszámítottam a halmazok különböző osztályainak közepes átmérőjét a Trümpler által nyert távolságok alapján. Utóbbiak közül csak a 76 legmegbízhatóbbat vettem tekintetbe. Ha a közepes átmérőt az egyes osztályokban egységnek vesszük, a halmazok átlagos átmérőjére ($\overline{D}$), külön választva a sötét ködökkel összeköttetésben álló halmazokat a normális vidékeken levőktől, a különböző fotometriai távolságokban a 2. táblázatban feltüntetett értékeket kapjuk.

2. táblázat.

Fot. távolság	Normális vidékek			Sötét ködökben			Az egész égen		
	$\overline{\varrho}$	ν	$\overline{D}$	$\overline{\varrho}$	ν	$\overline{D}$	$\overline{\varrho}$	ν	$\overline{D}$
0— 500 ps	297	14	0·84	238	4	0·82	284	18	0·83
500—1000 «	690	28	0·74	660	11	0·84	680	39	0·76
1000—1500 «	1180	9	0·97	1100	5	1·04	1150	14	0·99
1500—2000 «	1650	2	1·00:	1600	2	1·22:	1625	4	1·11:
2000—3000 «	2560	7	0·87	2330	5	1·45	2460	12	1·11
3000 «	—	—	—	3790	8	1·66	3790	8	1·66

A táblázatban $\overline{D}$-nek a távolsággal való növekedése a sötét ködökben levő halmazoknál igen szembeötlő, viszont a többi halmaznál nem mutatkozik ilyesmi. Ha a Trümpler-féle módszer kifogástalan volna, ebből azt kellene következtetni, hogy a sötét ködökön kívül nincsenek fénygyengítő intersztelláris anyagok. De színmérésekből tudjuk, hogy a legtöbb igen csillagdús vidéken is mutatkozik szelektív fénygyengítés, éspedig néha igen tetemes, úgyhogy ilyen vidékeken is jelentős intersztelláris fénygyengítéssel kell számolnunk.

[9] Csillaghalmazok. Stella Almanach 1932-re. 126—142. o.

[10] Collinder: On structural properties of open galactic clusters and their spatial distribution. Lund Annals No. 2. 1931.

Különösképpen eddig még nem mutattak rá a TRÜMPLER-féle módszer egy gyengéjére, amely ezt az ellenmondást és az α-ra kapott kis értéket is egyszerre megmagyarázza. Csillaghalmazokban a legfényesebb csillagok mindig a halmaz középpontjában foglalnak helyet és minél gyengébb halmazcsillagokra térünk át, annál nagyobb területre oszlanak azok szét. Vagyis az átmérő függvénye a csillagok abszolút fényességének. Így ha a látszó átmérőket olyan felvételekből határozzák meg, amelyek körülbelül ugyanazon látszó fényrendig terjednek, a valódi átmérőre annál kisebb értéket kellene kapnunk, minél távolabb van tőlünk a halmaz. A nyilthalmazoknál ez a jelenség csak azért nem mutatkozik, mert az intersztelláris fénygyengítés elég erős ahhoz, hogy ennek ellenére éppen ellenkező menetet idézzen elő. De a gömbhalmazoknál, amelyeknek túlnyomó része az intersztelláris anyagok rétegén messze kívül esik, a menet igen feltűnő. Így azokra a gömbhalmazokra, amelyeknek távolságait a bennük levő változócsillagok vagy a legfényesebb csillagainak fényrendjéből határozták meg, az átmérő és távolság között SHAPLEY: Star Clusters c. könyvében közölt megfigyelési adatok alapján a 3. táblázatban feltüntetett összefüggést kaptam.

3. táblázat.

Távolság	I—VI osztály[11]		VII—XII osztály		Összes	
	v	átmérő	v	átmérő	v	átmérő
5—10 kilops	3	31·3 ps	6	30·2 ps	9	30·5 ps
10—15 «	8	29·6 «	4	26·4 «	12	28·5 «
15—20 «	5	22·0 «	6	20·8 «	11	21·4 «
20—25 «	2	14·8 «	5	13·0 «	7	13·5 «
25—30 «	1	11·9 : «	5	15·2 «	6	14·6 «

Nyilthalmazokban, minthogy azok mind a fénygyengítő rétegen belül vannak, nem tudjuk ilyen módon meghatározni ezt az össze-

[11] A gömbhalmazokat SHAPLEY a halmazcsillagok középponti sűrűsödése szerint 12 osztályba sorolta. I jelenti a legnagyobb, XII a legkisebb középponti sűrűsödést.

függést, de a különböző fényességű csillagoknak egy-két nyilthalmazban megállapított eloszlása után ítélve, itt is ugyanilyen értelmű összefüggés áll fenn az átmérő és az abszolút fényesség között.[12] Akkor viszont a 2. táblázatban a normális vidékekre kapott eredményt nem tekinthetjük annak bizonyítékául, hogy ott nincs fénygyengítés. Ellenkezőleg, kell fénygyengítésnek lenni, éspedig akkorának, amely az átmérőnek a távolsággal való csökkenését körülbelül éppen semlegesíti.

A gömbhalmazoknál, egybevéve a különböző osztályokat, a parszekben megadott valódi átmérő, D és a távolság logaritmusa között nagyjából lineáris összefüggés áll fenn, éspedig

$$D = 137{\cdot}0 - 27{\cdot}1 \log r. \tag{3}$$

Annak, hogy ez a formula kb. 110,000 parszeknél nagyobb távolságra D-re negatív értéket ad, nincs jelentősége, mert ilyen távoli gömbhalmazokat nem ismerünk.

A csillaghalmazok átmérőjének megállapítása a Franklin Adams-Charts alapján történt és ezek körülbelül a 16·0 fényrendig terjednek. (3)- és (1)-ből, ha utóbbiba $m = 16{\cdot}0$-t teszünk, kapjuk a gömbhalmazok átmérőjét, mint a halmazcsillagok abszolút fényrendjének, M-nek függvényét:

$$D = 23{\cdot}2 + 5{\cdot}4\, M \tag{4}$$

A 4. táblázat első három oszlopában közöljük Trümpler eredményeit a nyilthalmazok átmérő—távolság-relációjára, D-t ugyanolyan egységekben kifejezve, mint a 2. táblázatban. A negyedik oszlopban találjuk, hogy a szintén a Franklin Adams-Charts segítségével meghatározott átmérők a $\bar{\varrho}$ távolságban levő halmazokra milyen abszolút fényességre vonatkoznak.

A nyílthalmazokra is a (4)-hez hasonló lineáris összefüggést véve D és M között, a néhány csillagrajra (Praesepe, Pleiades Hyades) vonatkozó adatok alapján, a közepes átmérő egységeiben kifejezve a

$$D = 0{\cdot}55 + 0{\cdot}03\, M \tag{5}$$

[12] L. pl. W. J. Klein Wassink: The proper motion and the distance of the Praesepe cluster. Astr. Lab. Publ. Groningen. No. 41. 1927.

4. táblázat.

$\bar{\varrho}$	v	D	M	$D(5)$	D'
294	18	0·81	+ 8·7	0·81	0·81
730	39	0·89	+ 6·7	0·75	0·96
1260	14	1·02	+ 5·6	0·72	1·15
1620	4	1·20	+ 4·9	0·70	1·39
2460	12	1·15	+ 4·0	0·67	1·39
3850	8	1·55	+ 3·0	0·64	1·96

összefüggést kapjuk. Természetesen ezt egész durva közelítésnek kell tekinteni és kétséges, hogy ez az összefüggés mindenfajta nyilthalmazra érvényes. De egyelőre nem tudunk pontosabb eredményt levezetni.

A 4. táblázat 5. oszlopában találjuk az (5) alapján levezetett átmérőket. Ha Trümpler átmérőértékeit korrigáljuk az (5)-ből adódó (D, M)-összefüggésre, kapjuk az utolsó oszlopban levő D' adatokat. Ezek adják a ténylegesen intersztelláris fénygyengítésből származó távolság-átmérő összefüggést. D' a valódi átmérővel, D-vel így függ össze:

$$D'/D = \varrho / r. \tag{6}$$

Minthogy ϱ és r között a (2) összefüggés áll fenn, következik

$$\log D = \log D' - 0{\cdot}0002 a r. \tag{7}$$

A (7) és (2) segítségével különböző a-ra kiszámíthatjuk a 4. táblázatban adott D'-höz tartozó D-ket. Mivel a valódi átmérőnek nem szabad nőni a távolsággal, azt az a értéket kell elfogadnunk, melyre a (7)- és (2)-ből számított D-k nagyjából függetlenek a távolságtól. Ez körülbelül $a = 1{\cdot}4$-re következik be.

A sötét ködöktől mentes részekre a 2. táblázatban közölt értékekből, az (5) összefüggésre való korrekció után a-ra 0·50 adódik, tehát körülbelül harmadrésze az összes halmazból kapott értéknek. Ez arra mutat, hogy a fénygyengítés nagy része a különálló sötét ködöktől származik.

4. §. Más módszerek még sokkal nagyobb értéket adnak a-ra, mint az általunk korrigált Trümpler-féle módszer. Bottlinger és Schneller 171 δ Cephei-csillag fotometriai távolságából ki-

számította e csillagoknak a Tejút síkjától való távolságát. Jelöljük ezt z-vel. Eredményük szerint[13] z átlagban nő a csillagok távolságával. Minthogy feltehető, hogy a δ Cephei-csillagok rendszerének vastagsága mindenütt kb. ugyanakkora, z növekedését az intersztelláris fénygyengítés hatásának kell tulajdonítani z növekedésének mértékéből $a = 2{\cdot}0$ adódik.

Gyllenberg kritikai vizsgálata[14] szerint, ha a megfigyelési anyagban több szisztematikus hibát tekintetbe veszünk, a értéke kb. 1·6-ra csökken. Joy már idézett értekezésében megismételte Bottlinger és Schneller számításait olyan anyag alapján, amely ezen szisztematikus hibáktól mentes és $a = 1{\cdot}5$ értéket kapott. Csakhogy Joy kihagyta itt is az erős sötét ködökben levő csillagokat. Ha ezeket is tekintetbe vesszük, számításom szerint $a = 1{\cdot}8$ adódik.

Véleményem szerint a legsúlyosabb két kifogás, amely ez ellen a módszer ellen tehető, a következők: 1. A Tejútrendszer a középpontja táján minden valószínűség szerint vastagabb, mint másutt és ezért a Tejútrendszer centruma irányában z a valóságban is nő a távolsággal. 2. A legnagyobb kiterjedésű és a legerősebben fénygyengítő sötét ködök is éppen ebben az irányban találhatók, éspedig pontosan a Tejút síkjában. Ezeknek erős fénygyengítése következtében a Tejútrendszer centrumának irányában, kis galaktikai szélességben csak a közeli változócsillagokat lehet megtalálni, míg nagyobb távolságban csak a sötét ködökön kívül levő, tehát egyúttal magasabb galaktikai szélességben levő változócsillagokat tudjuk felfedezni. Vagyis a Tejútrendszer centruma irányában nagyobb távolságban erős szelekció érvényesül olyan változócsillagok javára, amelyeknek z-je nagy.

---

[13] K. F. Bottlinger u. H. Schneller: Über die interstellare Absorption innerhalb der Milchstrasse. Zeitschr. f. Astroph. **1.** 339. 1930. Eddig elkerülte a figyelmet, hogy Russell és Shapley már ugyanerre a jelenségre bukkantak a födési változók térbeli eloszlásának vizsgálatánál (Astroph. Journ. **40.** 417. 1914.) és azt ők is az intersztelláris fénygyengítéssel magyarázták. Sőt megvizsgálták ebből a szempontból a δ Cephei-csillagokat is és eredményük a-ra teljesen egyezik a későbbi, nagyobb anyag alapján nyert eredményekkel.

[14] W. Gyllenberg: Notes on a method to determine the cosmic absorption. Lund Medd. Ser. I. Nr. 144. 1936.

Ezért újabb, sokkal nagyobb és pontosabb anyag alapján megvizsgáltam 268 δ Cephei-csillag térbeli eloszlását, éspedig külön választva a 20°—290° galaktikai hosszúságok közé eső csillagokat a 290°—20° hosszúságok közt levőktől. Az 5. táblázatban adjuk az eredményt. b a galaktikai szélesség, $\varrho \cos b$ tehát a csillagoknak a Tejút síkjára való vetülete, ν a csillagok száma. Összehasonlításul közöltük BOTTLINGER és SCHNELLER eredményeit is. A z-értékeket korrigáltuk a Naprendszernek a galaktika-síktól való távolságára, amelyre a δ Cephei-csillagok térbeli eloszlásából $+30{\cdot}4$ parszeket kaptunk, jó megegyezésben másoknak különböző anyag alapján kapott eredményeivel.

5. táblázat.

$\varrho \cos b$	20°—290°			290°—20°			BOTTL.—SCHN.		
	ν	$\overline{\varrho \cos b}$	$\bar{z}$	ν	$\overline{\varrho \cos b}$	$\bar{z}$	ν	$\overline{\varrho \cos b}$	$\bar{z}$
0— 1 kps	34	580	97	14	550	72	38	597	71
1— 2 «	33	1500	95	7	1470	169	23	1520	111
2— 3 «	32	2530	81	6	2560	240	26	2440	139
3— 4 «	20	3320	108	5	3500	163	26	3510	148
4— 6 «	17	4810	142	6	4710	291	22	4910	144
6—12 «	23	8420	208	9	8310	510	10	8490	438
12—25 «	11	16100	427	10	17100	3346 !	16	16400	448

Mint a táblázatból láthatjuk, $\bar{z}$-nek növekedése a távolsággal sokszorta kisebb az első csoportban, mint a másodikban, ahová a Tejútrendszer centrumának iránya is tartozik. Az említett szelekciónak tehát igen nagy szerepe van a $\bar{z}$-nek a távolsággal való növekedésében. Amíg BOTTLINGER és SCHNELLER egész égre kiterjedő adataiból $a = 2{\cdot}0$ következik, a 20°—290° hosszúságok között elegendő $a = 1{\cdot}4$ a növekedés megmagyarázására, viszont a 290°—20° hosszúságintervallumba eső csillagokra, még ha az utolsó sorban levő nagy ugrást nem is vesszük tekintetbe, $a > 2{\cdot}4$. Ez mindenesetre mutatja a módszer bizonytalanságát. Az a leghelyesebb, ha csak a 20°—290° hosszúságok között levő csillagokból adódó $a = 1{\cdot}4$ értéket fogadjuk el. Azt, hogy a két hosszúságintervallum közt levő különbséget nem az intersztelláris fénygyengítésben mutatkozó esetleges különbségek okozzák, mutatja az is, hogy a 290°—20° között levő csillagok átlagos galaktikai szélessége nem csökken állandóan a látszó fényrend növekedésével, ennek pedig bármilyen erős fénygyengítés esetében fenn kellene állnia:

$\overline{m}$	8	8—11	11—13	13
$\overline{b}$	9·2°	5·3°	5·0°	10·2°
ν	12	17	15	14

Meg lehet kísérelni a módszernek alkalmazását a nyilthalmazokra is. Ezirányú számításokat a Collinder-féle katalógus 309 nyilthalmazára vonatkozó adatok alapján végeztem. (L. 6. táblázatot. A távolságok itt fényévben vannak megadva, mert Collinder katalógusa is úgy adja meg őket.)

6. táblázat.

Távolság (fényévben)	90°—270°			270°—90°		
	ν	$\overline{\varrho}$	$\overline{z}$	ν	$\overline{\varrho}$	$\overline{z}$
0— 2000	28	1400	185	10	1020	152
2— 4000	22	2700	285	23	2980	213
4— 6000	18	4980	390	13	5100	340
6— 8000	33	7100	560	17	7100	390
8—10000	23	8800	460	18	9100	520
10—12000	21	11000	744	8	10600	533
12—15000	17	13900	830	7	13400	790
15—20000	18	16400	1390	6	17300	770
> 20000	14	27700	2110	13	33800	2320

$\overline{z}$-nek növekedése a távolsággal itt még sokkal feltűnőbb, mint a δ Cephei-csillagoknál és ha a Tejútrendszer centrumának irányában levő halmazokat nem is vesszük figyelembe, α-ra akkor is 2·0 értéket kapunk.

Ugyanezt az értéket kapta Stenquist egy más módszerrel, a cambridge-i sajátmozgás-katalógus 2959 csillagának vizsgálatából.[15]

[15] E. Stenquist: A spectrophotometric study of the Cambridge proper motion stars. Upsala Medd. No. 72. 1937.

STENQUIST meghatározta a csillagok spektrálfotometriai vizsgálata útján spektroszkópiai parallaxisukat és az így kapott fotometriai távolságértékek alapján a sajátmozgásokból kiszámította a tangenciális sebességeket. Az intersztelláris fénygyengítés következtében ezekre a távolság növekedésével mind nagyobb értékek adódnak és így a Naprendszer mozgásának sebessége és a sebességellipszoidok tengelyei is nőnek a távolsággal. $a = 2{\cdot}0$ érték mellett ez a szisztematikus menet eltűnik.

5. §. Most kimutatjuk, hogy az említett módszerek akkor is a-nak zérótól meglehetősen különböző értékére vezetnének, ha a valóságban nem volna intersztelláris fénygyengítés és ha a megfigyelési anyag nem is szelektív és ha nincsenek is szisztematikus hibák benne. Ugyanis éppen a véletlen megfigyelési hibák, amelyek néha elég tetemesek, okozhatnak olyan hatásokat, mint az intersztelláris fénygyengítés.

Legyen $N(r)\,dr$ a felhasznált anyagból azon égitestek száma, amelyek valódi távolsága r és $r+dr$ között van. Ha nincs intersztelláris fénygyengítés, akkor a fotometriai úton meghatározott távolságok csak az abszolút és a látszó fényrend hibái miatt térhetnek el a valóságos távolságtól. Ha a kettő együttes hibája μ, a hibás értékből számított távolság, ϱ és a valódi távolság, r között (1) szerint az

$$5 \log r = 5 \log \varrho - \mu \tag{8}$$

összefüggés áll fenn. Legyen a hibaeloszlás függvénye $K(\mu)$, ami azt jelenti, hogy N számú csillag közül $N.K(\mu)d\mu$-nél a fényrendben elkövetett hiba μ és $\mu+d\mu$ közé esik. A hibák következtében a $(\varrho, \varrho+d\varrho)$ távolság-intervallumba eső égitesteknek a megfigyelési anyag alapján adódó száma különbözik $N(\varrho)d\varrho$-tól. U. i. ebbe az intervallumba a hibák folytán olyan égitestek is belekerülnek, amelyek a valóságban az $(r, r+dr)$ intervallumban vannak, éspedig ezek száma:

$$K(\mu)\,N(r)\,dr.d\mu = K(5 \log \varrho - 5 \log r)\,N(r)\,dr.5 \log e.d\varrho/\varrho.$$

Tehát, ha $\nu(\varrho)d\varrho$ az égitesteknek a megfigyelésekből adódó száma a $(\varrho, \varrho+d\varrho)$ távolságintervallumban, akkor

$$\nu(\varrho) = 5 \log e\varrho^{-1} \int_0^\infty K(5 \log \varrho - 5 \log r)\,N(r)\,dr. \tag{9}$$

Ez az egyenlet az

$$y = 5 \log r,\ x = 5 \log \varrho \qquad (10a,\ b)$$

$$10^{0 \cdot 2x}\nu(10^{0 \cdot 2x}) = \psi(x) \quad \text{és} \quad 10^{0 \cdot 2y}N(10^{0 \cdot 2y}) = \varphi(y) \qquad (11a,\ b)$$

szubsztitúciókkal a következő alakra hozható:

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y)\varphi(y).dy = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y)\varphi(x-y).dy. \qquad (12)$$

Eź egy elsőfajú lineáris integrálegyenlet, amely formálisan Fourier-integrálok segítségével oldható meg.[16] Ugyanilyen alakú integrálegyenletre vezet a sztellárstatisztika alapproblémája: a csillagok látszólagos eloszlásából a térbeli eloszlást meghatározni.[17]

Ha a távolságmeghatározások átmérőkből történtek, mint pl. a 6. táblázatban is, akkor, ha a valódi átmérőt D-vel, a távolságmeghatározás alapjául vett közepes átmérőt Δ-val jelöljük:

$$\log r - \log \rho = \log D - \log \Delta. \qquad (13)$$

Ha behozzuk a $\log \Delta - \log D = 0{\cdot}2\mu$ jelölést, (8)-cal azonos formulát kapunk és a számítás további menete teljesen olyan, mint elébb.

Számítsuk ki most az égitestek valamely z állapothatározójának átlagos értékét különböző r távolságokra. Olyan z állapothatározókat veszünk vizsgálat alá, amelyek az égitest távolságának és az állapothatározó látszólagos értékének ismeretével kiszámíthatók éspedig a távolsággal egyszerűen a $z =$ konst. r formulával függnek össze. Ilyen állapothatározók a csillaghalmazok átmérője, égitestek távolsága a galaktikasíktól, a tangenciális sebesség stb. Az állapothatározó valódi középértékét az $(r,\ r+dr)$ távolságintervallumban levő égitestekre jelöljük $\bar{z}(r)$-rel. Az égitestek távolságának kiszámításánál elkövetett hibák következtében $(\varrho,\ \varrho+d\varrho)$ intervallumban a középértékre nem $\bar{z}(\varrho)$-t kapunk, hanem ettől általában különböző $\zeta(\varrho)$ értéket. A valóságban az $(r,\ r+dr)$ intervallumban levő, de a megfigyelési hibák következté-

---

[16] Lásd E. C. Titchmarsh: Introduction to the theory of Fourier integrals. Oxford. 1937. p. 314—6.

[17] K. Schwarzschild: Über die Integralgleichungen der Stellarstatistik. Astr. Nachr. 185. 81. 1910.

ben $(\varrho, \varrho+d\varrho)$ intervallumba került $K(\mu)N(r)dr.d\mu$ számú csillag z állapothatározójának középértéke $\bar{z}(r)\varrho/r$ lesz és így

$$\zeta(\varrho)=\frac{\varrho\int\limits_0^\infty K(\mu)\,N(r)\,r^{-1}\bar{z}(r)\,dr}{\int\limits_0^\infty K(\mu)\,N(r)\,dr}\cdot \tag{14}$$

Előbbi alkalmazásainknak megfelelőleg $\bar{z}(r)$-t állandónak veszszük. Behozva a (10a, b) és (11b) által adott mennyiségeket, továbbá

$$\chi(x)=\psi(x)\,\zeta(10^{0\cdot 2x})\,10^{-0\cdot 2x}z^{-1} \tag{15}$$

függvényt, (14) így írható:

$$\chi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(x-y)\,\varphi(y).10^{-0\cdot 2y}dy. \tag{16}$$

A (12) és (16) együttesen a probléma egyenletei. Ha K-t ismerjük, (12)-ből meghatározhatjuk φ-t és (16)-ból azután χ-t és evvel $\zeta(\varrho)$-t.

Ha $\nu(\varrho)\sim\varrho^{-n}$, azaz ha $\log\nu$ lineárisan csökken $\log\varrho$-val, akkor mint a (12) integrálegyenlet második alakjából könnyen láthatjuk, $N(r)$ függetlenül a K függvény alakjától, hasonló alakú: $N(r)\sim r^{-n}$ és $\zeta(\varrho)$ konstans.

Az 1., 2., 4., 5. és 6. táblázatban közölt megfigyelési anyagban azonban, ha az égitestek számát, ν-t egyenlő intervallumokra számítjuk át, $\ln\nu$ bizonyos távolságtól kezdve gyorsabban csökken a távolság logaritmusával. Általában $\ln\nu$-re $\ln\varrho$-ban kvadratikus alakot vehetünk:

$$\ln\nu(\varrho)=A+B\ln\varrho-C\ln^2\varrho \qquad (C>0). \tag{17}$$

A hibaeloszlási függvényre, $K(\mu)$-re, minthogy véletlen hibákról van szó, a GAUSS-féle eloszlást vehetjük:

$$K(\mu)=\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2\varepsilon^2}}=e^{\alpha-\gamma(\ln\varrho-\ln r)^2} \qquad (\gamma>0), \tag{18}$$

ahol ε a megfigyelések közepes hibája és

$$\gamma=25\log^2 e/2\varepsilon^2. \tag{18a}$$

Mint könnyen kimutatható, $\ln N(r)$ akkor szintén kvadratikus függvénye lesz $\ln r$-nek,[18] azaz

$$\ln N(r) = a + b \ln r - c \ln^2 r \quad (c > 0) \tag{19}$$

A konstansok közötti összefüggések meghatározására számítsuk ki mindjárt a következő integrált:

$$J(p) = \int_0^\infty K(5 \log \varrho - 5 \log r) N(r) r^p dr, \tag{20}$$

ahová K helyébe (18)-at, $N(r)$ helyébe (19)-et tesszük. Az eredmény:

$$\ln J(p) = M + S \ln \varrho - P \ln^2 \varrho, \tag{21a}$$

ahol

$$\left.\begin{aligned} M(p) &= \ln \sqrt{\frac{\pi}{c+\gamma}} + a + a + \frac{(p+b+1)^2}{4(c+\gamma)} \\ S(p) &= \frac{\gamma}{c+\gamma}(p+b+1), \qquad P(p) = \frac{c\gamma}{c+\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{21b}$$

P független p-től.

(9) szerint

$$\nu(\varrho) \cdot \varrho = 5 \log e . J(0), \tag{22}$$

Továbbá

$$\zeta(\varrho) = z\varrho \frac{J(-1)}{J(0)} = \text{konst.}\ \varrho^{c/c+\gamma} \tag{23}$$

vagyis, mivel $c/c + \gamma > 0$, $\ln \zeta(\varrho)$ lineárisan nő ϱ-val.

Minthogy a (21b) és a (22) formulákból

$$c = C\gamma (\gamma - C)^{-1} \tag{24}$$

a megfigyelési anyaggal adott $\nu(\varrho)$ és $K(\mu)$ együtthatóival kifejezve

$$\zeta(\varrho) = \text{konst.}\ \varrho^{C/\gamma}. \tag{25}$$

Látjuk tehát, hogy ha a megfigyelési anyagunkban bizonyos távolságtól kezdve a csillagok száma a távolsággal elég gyorsan csökken, a véletlen megfigyelési hibák következtében olyan állapothatározókra, amelyeknek értéke a valóságban a különböző távolságokban ugyanakkora, a távolsággal növekvő értéket kapunk. A hatás tehát ugyanolyan értelmű, mint az intersztelláris fénygyengítésé.

Ha $\bar{z}(\varrho)$ a rotációs effektus, akkor $\bar{z}(\varrho) = A\varrho$ és mivel a rotációs

---

[18] Általánosabb megoldásokról l. L. Detre: Über die räumliche Verteilung der Sterne. Diss. Berlin. 1929. Mitt. d. Sternwarte Budapest No. 1.

effektust radiális sebességekből vezetik le, amelyek függetlenek a távolságtól, az r távolságból a megfigyelési hibák következtében ϱ távolságba került csillagokra a rotációs effektus Ar marad. A megfigyelésekből adódó rotációs effektus, $R(\varrho)$ tehát, ha $\nu(\varrho)$-ra a (17) alakot vesszük,

$$R(\varrho) = A.J(1)/J(0) = \text{konst. } \varrho^{1-C/\gamma}, \qquad (26)$$

A rotációs effektus tehát nem nő lineárisan a távolsággal, hanem annál lassabban, minél nagyobb C és ε. Itt is ugyanolyan hatás mutatkozik tehát, mint az intersztelláris fénygyengítés következtében.

6. §. Vizsgáljuk most sorban az intersztelláris fénygyengítés koefficiensének meghatározására felhasznált különböző módszereket és a megfigyelési anyagot abból a szempontból, mennyire befolyásolja a véletlen megfigyelési hibáknak elébb levezetett hatása a koefficiensre kapott értéket.

A δ Cephei-csillagok távolságmeghatározása két módszerben is szerepel, egyrészt a JOY-féle módszerben, másrészt a BOTTLINGER—SCHNELLER-félében. A távolságmeghatározás hibái itt a látszólagos fényrend hibáitól származnak. A látszólagos fényrendet az évenként megjelenő babelsbergi változócsillag-jegyzékből vették és ez a legkülönbözőbb forrásokból összeállított anyag éppen a látszó fényrendben igen inhomogén. A svábhegyi csillagdán a rövidperiodusú δ Cephei-csillagok periodus- és fénygörbe változásairól már közel egy évtizede folyó vizsgálatok alapján bő tapasztalataink vannak a jegyzékben közölt adatok megbízhatóságáról. Mi a fényességet nagy pontossággal az internacionális fotográfiai fényességskálában határozzuk meg. Ezek az értékek a babelsbergi jegyzék adataitól igen sokszor 1·0—1·5 fényrend eltérést mutatnak, de néha 2·0—2·5 fényrendnyi eltérések is előfordulnak. Az eddig vizsgált 40 csillagból ε legvalószínűbb értékére 0·7 fényrendet vehetünk, ennek megfelel γ=4·853, ha a hibákra a Gauss-féle (18a) eloszlást vesszük.

Az 5. táblázatban a 20°—290° hosszúságnak megfelelő adatokból látjuk, hogy $\nu(\varrho)$ értéke először állandó, majd gyorsan csökkenni kezd és 2 kiloparszeken felül jól ábrázolható egy (17) alakú formulával. C értékére — egyedül ez érdekel bennünket — 1·057-et kapunk. (25) szerint lesz tehát

$$\zeta(\varrho) = \text{konst. } \varrho^{0 \cdot 22}.$$

E szerint ζ értéke a legközelebbi csillagoktól a legtávolabbakig körülbelül kétszeresére emelkedik, tehát az 5. táblázatban $\bar{z}$-re kapott menet közel felét nem az intersztelláris fénygyengítés, hanem a véletlen megfigyelési hibáknak kell tulajdonítani. Ha ezt tekintetbe vesszük, az α-ra elébb kapott 1·4 érték helyett, közelítő számítás szerint 0·95-et kapunk.

A Joy által felhasznált anyag (1. tábl.) pontossága a látszó fényrendre nézve sokkal nagyobb, hiszen a radiális sebesség csak az ismertebb és így többször és pontosabban észlelt csillagokra ismeretes. Azonkívül log $\nu(\varrho)$ az első három távolságintervallumban lineárisan csökken log ϱ-val és csak a legutolsó intervallumban csökken le erősen. Ennek megfelelőleg a megfigyelési hibák hatása inkább csak az utolsó távolságintervallumban észrevehető. Mint az 1. táblázatban láthatjuk, a rotációs effektus értéke itt kisebb, mint a megelőző intervallumban. Akármilyen erős is volna az intersztelláris fénygyengítés, ennek nem lenne szabad bekövetkeznie. Joy ezt az anomáliát nem tudta megmagyarázni, de az elébb ismertetett effektussal érthetővé válik. Joy α meghatározásánál a legtávolabbi csillagokat nem vette tekintetbe és ugyanezt tettük mi is. Viszont a maradék anyagban a megfigyelési hibák befolyása csak igen kicsi lehet, minthogy log ν lineárisan csökken log ϱ-val. α értéke mindenesetre nem kisebb 0·9-nél. A Berman-féle anyagban ugyanez áll log ν-re és így, bár a távolságmeghatározások hibái itt lényegesen nagyobbak, ezek befolyása α értékére aligha észrevehető.

Trümpler anyagában (2. és 4. táblázat) log $\nu(\varrho)$ kvadratikus log ϱ-ban, éspedig $C=0{\cdot}56$. A megfigyelési hibák, minthogy itt is, akárcsak a δ Cephei-csillagoknál, a látszó fényrend hibái, nagyjából ugyanakkoráknak vehetők, mint az előbbieknél. Így (25) szerint $\zeta \sim \varrho^{0{\cdot}12}$ és ezt tekintetbe véve, α értéke 1·4-ről 1·1-re csökken.

A 6. táblázatban levő adatokra $C=2{\cdot}17$. A távolságmeghatározásokban elkövetett hibák nagyságát itt nehezen tudjuk megbecsülni, de a hibák mindenesetre nagyobbak, mint a fényrendmeghatározásoknál. E miatt és C nagy értéke következtében a $\bar{z}$-ben mutatkozó erős menet igen nagy része származhat a megfigyelési hibáktól és így az α-ra kapott nagy érték érthető.

Stenquist anyagából nem állnak rendelkezésemre a megfelelő adatok $\nu(\varrho)$-ra sem, de kétségtelen, hogy a gyengébb csillagok sajátmozgásának nagy bizonytalansága erősen hozzájárul α magas értékéhez, amely ebből a módszerből is adódik.

A véletlen megfigyelési hibáknak az 5. §-ban ismertetett befolyását tekintetbe véve tehát érthetővé válnak az α-ra a különböző módszerekkel kapott értékek közti nagy eltérések és ahol megfelelő numerikus adatok rendelkezésünkre állanak, számszerűleg is összhangba tudjuk hozni az eredményeket. A legbiztosabb, a Tejútrendszer forgásán alapuló módszer különböző anyag alapján egyöntetűen 0·9-et ad, a Bottlinger—Schneller-féle módszer 0·95-et, a Trümpler-féle 1·1-et, de utóbbinál nagy bizonytalanságot okoz a halmazok átmérőjének az abszolút fényrendtől való függése. α legvalószínűbb értékének 0·92 vehető.

α-nak ez az értéke elég magas ahhoz, hogy a csillagszámlálások ne vezessenek a valószínűtlen lokális rendszerhez, viszont még elég kicsi, hogy a másik véglet elő ne álljon, t. i. hogy a csillagok térbeli sűrűségére minden irányban a távolsággal növekvő értéket kapjunk.

Detre László.

ÜBER DIE SCHWÄCHUNG DES LICHTES DURCH DIE INTERSTELLARE MATERIE.

Bekanntlich führen die verschiedenen Methoden für die Bestimmung der Stärke der interstalleren Lichtabschwächung zu stark divergierenden Werten. Es wird hier gezeigt, dass ein Teil der Abweichungen durch vorher unberücksichtigte systematische Fehler des Beobachtungsmaterials erklärt werden kann. Daneben können aber bei den verwendeten Methoden auch zufällige Beobachtungsfehler eine zu hohe interstellare Lichtabschwächung vortäuschen. Für die Berücksichtigung dieser Fehlerquelle ist die Lösung einer linearen Integralgleichung erster Art erforderlich. In § 5 werden dazu die entsprechenden Formeln entwickelt. Wendet man diese auf das vorliegende Problem an, so erklären sich auch die noch vorhandenen Widersprüche. Für den Koeffizienten der interstellaren photographischen Lichtabschwächung ergeben sich nach verschiedenen Methoden und unter Berücksichtigung der erwähnten Fehlerquelle Werte zwischen $0^m_.9$ und $1^m_.1$/kps, mit dem wahrscheinlichsten Wert $0^m_.92$/kps. *László Detre.*

KITŰZÖTT FELADATOK.

(A megoldásokat a következő címre kérjük: EGERVÁRY JENŐ, Budapest, IV. Kecskeméti-utca 4.)

9. Az n-dimenziós tér rácsvektorának nevezzük az olyan vektort, amely két rácspontot köt össze. Bebizonyítandó, hogy a tér összes rácsvektorai akkor és csak akkor állíthatók elő n adott $r_1, r_2, \ldots, r_n$ rácsvektor egész együtthatós lineáris kompozíciójaként

$$r = k_1 r_1 + k_2 r_2 + \cdots + k_n r_n$$

alakban (k_i egész szám), ha az $r_1, r_2, \ldots, r_n$ vektorok koordinátáiból alkotott determináns abszolút értéke 1. *(Veress Pál)*

10. Igazoljuk a következő integrál-összefüggéseket:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi x^2}}{1+x^2}\,dx = 2\pi e^{\pi} \int_{1}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx,$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{ch} \pi x} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

(Feldheim Ervin)

11. Legyen $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ a tér tíz tetszőleges pontja, melyek közül bármely négy nincs egy síkban. Eldöntendő, hogy annak az öt egyenesnek, melyben a

$$P_1P_2P_3,\ P_2P_3P_4,\ P_3P_4P_5,\ P_4P_5P_6,\ P_5P_6P_7$$

síkok rendre a

$$P_6P_7P_8,\ P_7P_8P_9,\ P_8P_9P_{10},\ P_9P_{10}P_1,\ P_{10}P_1P_2$$

síkokat metszik, van-e (és hány) közös metszőegyenesük, valahányszor a $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ pontok egy másodrendű felületen feküsznek.[1] *(Egerváry Jenő)*

12. Hányoldalú szabályos (sík) sokszögek helyezhetők el az n-dimenziós térben oly módon, hogy valamennyi szögpontjuknak mind az n derékszögű koordinátája egész szám legyen?[2]

---

[1] A kitűző nem ismeri a feladat megoldását.
[2] E feladat többek közreműködésével jött létre.

MEGOLDOTT FELADATOK.[1]

5. Legyenek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az

$$x^n - \binom{A}{1} x^{n-1} + \binom{A}{2} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \binom{A}{n} = 0 \qquad (1)$$

egyenlet gyökei, hol A tetszőleges szám. Bebizonyítandó, hogy

$$x_1^\nu + x_2^\nu + \cdots + x_n^\nu = A. \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n) \quad (2)$$

(Turán Pál)

Az 5. feladat megoldása.

Jelöljük s_ν-vel a gyökök ν-edik hatványösszegét. A feladatban kimondott állítás helyessége a $\nu=1$ esetre kézenfekvő. Tegyük föl, hogy igaz a $\nu=2, 3, \ldots, k-1$ esetben is. A gyökök elemi szimmetrikus formáit c_k-val jelölve, a GIRARD-féle formula szerint

$$k c_k = s_1 c_{k-1} - s_2 c_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1} s_k. \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Behelyettesítve ide a

$$c_i = \binom{A}{i} \qquad (i=1, 2, \ldots, k-1)$$

és az

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_{k-1} = A$$

értékeket és figyelembe véve a binomiális együtthatók következő ismert tulajdonságát:

$$\binom{A}{k} = \frac{A}{k}\left\{\binom{A}{k-1} - \binom{A}{k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{A}{0}\right\},$$

kapjuk, hogy $s_k = A$. *(Veress Pál)*

Az 5. feladat megoldását még beküldötték: BÁN LAJOS, *BLAU ÁRMIN, *CSADA IMRE, *FELDHEIM ERVIN, KÁRTESZI FERENC, KILCZER GYULA, LAX PÉTER, RADOS IGNÁC, SERES IVÁN, SURÁNYI JÁNOS, vitéz SZÉP JENŐ és WALDAPFEL LÁSZLÓ. — A *-gal jelöltek a kitűzött tétel következő megfordítását is bebizonyították: ha $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kielégítik a (2) feltételeket, akkor éppen az (1) egyenlet gyökei.

*

[1] A 4. feladat megoldását legközelebb közöljük. — A 2. feladat megoldását újabban még beküldötte: BLAU ÁRMIN és vitéz SZÉP JENŐ.

6. Bebizonyítandó, hogy egy determináns oszlopai közül kiválaszthatók bizonyosak (legalább egy) úgy, hogy minden sornak a kiválasztott oszlopokban levő elemei közt vagy csak páros, vagy csak páratlan sok 0 szerepel.

(Hajós György)

A 6. feladat első megoldása.

Az n-soros A determináns oszlopaiból összeállítható matrixok mindegyikéhez rendeljünk hozzá egy 0-okból és 1-ekből álló szám-n-est úgy, hogy a K matrixhoz rendelt szám-n-es i-edik eleme 0, vagy 1 legyen a szerint, mint K i-edik sorában páros, vagy páratlan a 0-ok száma. A oszlopaiból összeállítható matrixok száma 2^n-1. A lehetséges szám-n-esek száma 2^n. Ha a tétel nem igaz, akkor a $(0, 0, \ldots 0)$ és az $(1, 1, \ldots, 1)$ szám-n-es nem tartozik A egyik matrixához sem, tehát az A matrixaihoz rendelt szám-n-esek száma legfeljebb 2^n-2. Ekkor tehát van két olyan matrix, K és M, melyekhez ugyanaz a szám-n-es tartozik, vagyis a K és M i-edik sorában levő 0-ok száma egymással kongruens mod. 2. Ha az N matrix azokból az oszlopokból áll, melyek K és M valamelyikében, de nem mindkettőben szerepelnek, és K, M, N i-edik sorában rendre k, m, n számú 0 van, akkor $n=k+m-2s$, ahol s a közös oszlopokból összeállított matrix i-edik sorában levő 0-ok számát jelenti. Minthogy $k+m-2s\equiv k+m\equiv 0$ (mod. 2), hiszen k és m egyszerre páros, vagy páratlan, N-hez a $(0, 0, \ldots, 0)$ szám-n-es tartozik. A feltevés tehát hibás volt s így a tétel igaz.

(Fáry István)

A 6. feladat második megoldása.

Elsőrendű determinánsra evidens a tétel: az egyetlen lehetséges kiválasztás egyszersmind «jókiválasztás».

Tekintsük az $n>1$ rendszámú determinánsnak mondjuk első sorához tartozó aldeterminánsait. Tegyük fel, hogy ezekre már igaz a tétel, mindegyiknek van jókiválasztása. Nem kell, hogy ez mind különböző legyen; különböző aldeterminánsoknak lehet közös jókiválasztása, hiszen vannak közös oszlopaik. Olyan oszlop azonban nincs, amely mind az n aldeterminánsban szerepelne; ezek jókiválasztásai között tehát van legalább *két különböző*.

Lehet, hogy kettejük közül valamelyik az egész determinánsnak is jókiválasztása. Ehhez csak az kell, hogy első sorában is ugyanaz legyen a 0-paritás (a 0-ok száma mod. 2), mint a többiben.

De ha ez a kettő közül egyikre sem áll, akkor a közülük csak az egyikben szereplő oszlopok együttvéve az egész (n-edrendű) determinánsnak egy jókiválasztását adják. (U. i. az így kapott kiválasztás 0-paritása minden sorban az előbbi két kiválasztás megfelelő sorbeli 0-paritásainak összege; az első sor 0-paritása tehát a többiekétől $1+1=2$-vel tér el, és így a paritás minden sorban ugyanaz.)

(Vargha Tamás)

A 6. feladat harmadik megoldása.

Ha a determináns minden 0-eleme helyébe 1-et írunk és minden el nem tűnő eleme helyébe 0-t, akkor látnivaló, hogy a bizonyítandó állítás aequivalens a következővel. Legyen az $|a_{ik}|_{i,\,k=1,\,2,\ldots,\,n}$ determináns minden eleme vagy 0, vagy 1. Akkor mindig kiválaszthatók e determináns oszlopai közül bizonyosak (legalább egy) úgy, hogy valamennyi sor a kiválasztott oszlopokból páros számú, vagy valamennyi páratlan számú 1-est tartalmazzon.

Ez a tétel viszont úgy is megfogalmazható, hogy vagy az[1]

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\equiv 0, \qquad (i=1,2,\ldots,n) \quad \text{(I)}$$

vagy az

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\equiv 1 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \quad \text{(II)}$$

kongruenciarendszernek van a $(0,0,\ldots,0)$ rendszertől különböző (egész számokból álló) $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ megoldása. Valóban, ha e megoldásban $x_\alpha\equiv 1$, $x_\beta\equiv 1$, $x_\gamma\equiv 1,\ldots$, a többi x_j pedig $\equiv 0$, akkor az α-adik, β-adik, γ-adik,... oszlop kiválasztása felel meg a feladat követelményeinek. Azt kell tehát kimutatnunk, hogy ha (I)-nek a triviálison kívül nincs megoldása, akkor (II) megoldható. Mindjárt a következő általánosabb (jól ismert) tételt bizonyítjuk be.

Ha (I)-*nek a triviális az egyetlen megoldása, akkor az*

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\equiv b_i \qquad (i=1,2,\ldots,n) \quad \text{(III)}$$

kongruenciarendszernek van egy és csak egy (egész számú) megoldása, bármily rendszerét jelenti is $(b_1, b_2,\ldots, b_n)$ *az egész számoknak* (0-*nak és* 1-*nek*).

Hogy két különböző megoldás, $(y_1, y_2,\ldots, y_n)$ és $(z_1, z_2,\ldots, z_n)$ nem lehet, az világos, mert különben (amint az a megfelelő kongruenciák különbségeinek képzésével közvetlenül látható) a $(0,0,\ldots,0)$-tól különböző $(y_1-z_1, y_2-z_2,\ldots, y_n-z_n)$ rendszer (I)-nek megoldása volna. Más-más $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ rendszerek behelyettesítése (III)-ban

[1] Valamennyi kongruenciánk a 2 modulusra vonatkozik.

tehát más-más $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ rendszerhez vezet. A 2^n számú különböző $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rendszer helyettesítése íly módon *minden* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ rendszerhez elvezet, minthogy ezeknek száma természetesen ugyancsak 2^n.[2] Ha minden $b_i \equiv 1$, adódik a kívánt speciális tétel.

(König Dénes)

A 6. feladat negyedik megoldása.

Legyen R_2 a 2-karakterisztikájú törzstest, jelöljék ennek összes elemeit 0 és ε $(\varepsilon+\varepsilon=0,\ \varepsilon^2=\varepsilon)$, azonban egyszerűség kedvéért ε helyébe 1-et írunk. Tekintsük $t=0$, illetve $t=1$ mellett a következő egyenletrendszert R_2-ben

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=t,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=t,\\ \cdots\cdots&\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=t,\end{aligned}$$

amelyet megfelelőleg E_0-sal és E_1-gyel jelölünk. Legyen $A=(a_{ik})$ az E_0 matrixa, A_1 az E_1 összes együtthatóinak matrixa, azaz az a matrix, ami A-ból egy csupa 1-esből álló oszlop hozzávételével előáll. Legyen r az A rangja és r_1 az A_1 rangja. Akkor $r_1=r$ vagy $r_1=r+1$. Legyen még λ az E_0 független megoldásainak száma, továbbá ν_0 és ν_1 az E_0, illetve E_1 összes megoldásainak száma. Tudvalevően

$$\lambda=n-r,\quad \nu_0=2^\lambda,\quad \nu_1=\begin{cases}0 & (r_1=r+1),\\ \nu_0 & (r_1=r).\end{cases}$$

Ha tehát különösen $m=n$, akkor vagy $\nu_0>1$ (azaz E_0-nak van nem csupa 0-ból álló megoldása) vagy $\nu_0=1$ $(\lambda=0,\ r=n,\ r_1=n,\ \nu_1=1$ azaz E_1-nek van — egyetlen — megoldása). Ebben a különös esetben tehát E_0 és E_1 közül legalább az egyiknek van nem csupa 0-ból álló megoldása, s ez nem egyéb mint a feladat állítása azzal a lényegtelen változtatással, hogy a determináns 0 elemei helyett annak 1 elemeiről beszélünk, s a többi elem helyébe 0-t írunk. Ezen túlmenően r és r_1 a feladat megoldásainak számát is megadják, ez ugyanis $\nu_0+\nu_1-1$. Az $m\neq n$ esetről szóló fenti megállapítások is megengednek egy a feladathoz hasonló fogalmazást.

(Rédei László)

[2] E bizonyítás tetszőleges m modulusra is érvényes, csupán 2^n helyébe m^n teendő.

Megjegyzés a 6. feladathoz.

A bizonyítandó állítás MINKOWSKI általam igazolt[3] sejtésének, pontosabban a (csoportelméleti fogalmazásban tekintett) sejtés (4, 4, . . ., 4) típusú csoportra vonatkozó állításának folyománya. A feladat s a sejtés kapcsolatát a következőkben vázoljuk:

Ha volna a feladat állításának ellentmondó determináns, abban a zérusok és nem-zérusok helyett egyeseket és zérusokat írva egy n-edrendű $|a_{jk}|$ determinánshoz jutunk. Képezzük a következő «sorokat»:

$$\begin{array}{ll} T_1=1+A, & T_4=1+A\,B^2C^3, \\ T_2=1+B, & T_5=1+A^3B\,C^2, \\ T_3=1+C, & T_6=1+A^2B^3C\,, \\ S_j=1+E_j, & S_{n+j}=1+ABCE_1^{2a_{j1}}\dots E_n^{2a_{jn}}. \end{array} \qquad (j=1,\dots,n)$$

Bármilyen, az $1, i, -1, -i$ számokból alkotott s nem csupa 1-esből álló értékrendszert írunk is A, B, C, E_j ($j=1,\dots,n$) helyébe, a fenti sorok valamelyike s így Π szorzatuk is zérus. Ugyanilyen tulajdonságú az összes $A^\alpha B^\beta C^\gamma E_1^{\delta_1}\dots E_n^{\delta_n}$ ($\alpha,\beta,\gamma,\delta_j=0,1,2,3$) tagokból alkotott Σ összeg. Csupa 1-est választva Π és Σ közös értéke 4^{n+3}. A HILBERT-féle «Nullstellensatz»[4] szerint tehát a

$$\mathfrak{g}=(A^4-1, B^4-1, C^4-1, E_1^4-1,\dots, E_n^4-1)$$

polinomideál tartalmazza $\Pi-\Sigma$ valamely hatványát, sőt mivel $\mathfrak{g}$ primideálok legkisebb közös többszöröse s így $\mathfrak{g}$ maradékosztályai gyűrűjének egyetlen nilpotens eleme a 0, tartalmazza magát a $\Pi-\Sigma$ különbséget is. Más szóval: a $\mathfrak{g}$ által definiált csoportalgebrában $\Pi=\Sigma$. Minthogy a sorok egyike sem ciklikus, pedig a sejtés értelmében legalább egyiknek ciklikusnak kellene lennie, a feladat állítása helyes.

(Hajós György)

A 6. feladat megoldását még beküldötték: KÁRTESZI FERENC, SÁNDOR GYULA, SURÁNYI JÁNOS és VERESS PÁL.

---

[3] HAJÓS GY.: Többméretű terek egyszeres befedése kockaráccsal. Mat. Fiz. Lapok **48**, 37—64.

[4] Lásd pl. VAN DER WAERDEN: Moderne Algebra II., 11. Kap.

IRODALOM.

M. Zemplén Jolán: A modern fizika világképe. 80 oldal. Budapest, 1941. Magyar Szemle Társaság.

E műben a szerző, lényeges gondolatokat élesen meglátva, világos és könnyen érthető formában ad áttekintést a mai fizika fő vonásairól. Ki kell emelnünk, hogy sok helyen nehéz kérdéseket meglepően könnyen és világosan tud megfogalmazni, pl. az általános relativitást (27. old.). Másrészt éppen a könnyebb fejezetekben látjuk néha, hogy a tárgyalás eleganciája megtörik, pl. a 14. oldalon a fényinterferenciajelenségnek gumizsinórral való magyarázata nem szerencsés és alig hisszük, hogy abból megérthető lenne.

A bevezetésben ügyesen ismerteti a régi és az újabbkori fizika módszerének lényegét és nagyon kiemeli a modern fizika és a klasszikus fizika közti különbséget. A modern fizika az előzőtől az új felfedezéseken kívül a klasszikus fizika hagyományos elképzeléseivel szemben újszerű szemléleti módban és lényeges elvi eltérésekben különbözik.

Továbbiakban a fizikából hat fejezetet tárgyal, ezek: A klasszikus fizika világképe. A relativitás elmélete. Az anyag szerkezete. A BOHR-féle modell. Az atom szerkezetére vonatkozó felfogás a modern fizikában. A kvantummechanika. Ezekben a fejezetekben a fizika fő eredményei nemcsak mint felsorolások jutnak kifejezésre; a szerző mindenütt jól kiemeli a lényeges gondolatot, bár itt-ott erősen küzd a helyhiánnyal.

Helyreigazításra szorul a szerző, mikor azt állítja, hogy «CLAUSIUS fejtegetéseiben először használta a fizikában a «valószínűség» fogalmát» és a termodinamika második főtételét ezzel indokolta volna (20. old.). CLAUSIUS érdeme az entrópia fogalmának megalkotása. BOLTZMANN érdeme, hogy az entrópiát a mechanikai állapot valószínűségének logaritmusával definiálta. A valószínűséget a fizikába a kinetikus gázelméletben vezették be MAXWELL és BOLTZMANN, mikor nagyszámú molekula átlagos viselkedéséről kellett számot adni.

Nem helyeseljük az ilyen kijelentést: «Képzeljük el, hogy pl. repülőgépre ülünk, mely fénysebességgel rohan velünk» (26. old.). A fénysebesség ugyanis egész szinguláris jelentőségű határeset, melyet a mai felfogás szerint testek nem érhetnek el. Felhívjuk a figyelmet Helmholtz nevének helyesírására, melyet, mint a szerző is, sokan szeretnek Helmholz-nak írni.

Véleményünk szerint az alapállandók pontosabb, ill. újabb értékét ugyanolyan fáradsággal lehetne megadni, mint az elavult értékeket. pl. az elektron töltésének ma használt értéke 1938 óta $4{\cdot}803.10^{-10}$-el. sztat. egys. Ma már a kozmikus sugarakat nem tekintjük ultra γ-sugaraknak, hanem legalább 99%-ig korpuszkuláris sugárzásnak.

Az 56. oldalon a 16—19. sor nem világos, bővebben ki kellett volna fejteni. A héliumnál mutatkozó tömeghiány nem egymillió elektronvolt (59. oldal), hanem ennek 28·2-szerese. Helytelen az, hogy «a neutrinók rögtön abszorbeálódnak» és létük emiatt nem volna kimutatható (65. oldal). Éppen ellenkezőleg! Az egész neutrinó-felfogás azon alapul, hogy oly csekély az abszorpciója, hogy eddig semmiféle kísérlettel kimutatható nem volt. Azt sem lehet mondani, hogy «Schrödinger elmélete magasabb rendszámú atomok tárgyalásánál elszakad a valóság talajától» (78. oldal). Csak a szemléletességtől szakad el!

Legyen szabad még megemlítenem, hogy a régi és elavult Mendelejeff-féle periodusos rendszer helyett célszerűbb lett volna a sokkal jobb Bohr-féle periodusos rendszert közölni, mely világosan kifejezi, hogy a periodusok nem egyenlő hosszúak.

Végül mindent összefoglalva, ama nézetünknek adhatunk kifejezést, hogy ez a kis könyv valóban a mai fizika minden ágából rövid, de mégis elég alapos és élvezetes áttekintést nyujt és az ismeretterjesztésnek értékes szolgálatot tehet.

Péter Gyula.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1942. évi május 30-án tartott XLVII. közgyűlés.

A közgyűlést ORTVAY RUDOLF nyitotta meg. Először is a választásokra került sor. A kiküldött szavazatszedő bizottság (Szabó Gábor elnök, Hajós György, Novobátzky Károly) jelentése szerint a következő tisztikar választatott meg:

Elnök: POGÁNY BÉLA.
Alelnökök: FEJÉR LIPÓT és RYBÁR ISTVÁN.
Titkárok: KŐNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF.
Jegyzők: SZŰCS ADOLF és HOFFMANN ERNŐ.
Pénztáros: JELITAI JÓZSEF.

A lelépő választmányi tagok közül újból megválasztattak: NOVOBÁTZKY KÁROLY, RIESZ FRIGYES és STACHÓ TIBOR. Új választmányi tagok lettek: SZŐKEFALVI NAGY GYULA (az alelnökké választott Rybár István helyébe), JENDRASSIK GYÖRGY (a tavaly tiszteleti taggá választott Mikola Sándor helyébe), SZÁSZ PÁL (a tavaly tiszteleti taggá választott Szabó Gábor helyébe) és ALEXITS GYÖRGY (Faragó Andor helyébe). Végül közgyűlési számvizsgálók lettek: GOLDZIHER KÁROLY és RENNER JÁNOS.

A választások után az újonnan megválasztott elnök, POGÁNY BÉLA foglalta el az elnöki széket; meghatottan mondott köszönetet megválasztásáért, majd átadta a szót KŐNIG DÉNES titkárnak, aki a következő titkári jelentést olvasta fel.

Társulatunk második félszázadának első évéről számos örvendetes jelenteni valónk van. Jubiláris 48. kötetünk több mint 36 íves terjedelemben jelent meg. Különösen a magyar matematikusok bizonyára a jövőben is büszkén fognak rámutathatni arra, hogy ebben a súlyos korszakban, amikor az európai matematikai folyóiratok nagy része megszűnt vagy terjedelmének lényeges korlátozására kényszerült, lapjuk terjedelmét az addiginak háromszorosára sikerült emelniök. De talán nem csak mennyiségileg, hanem minőségileg is meg lehetünk elégedve. Hiszen jubiláris ülésünk előadásai után mindjárt első helyen oly híres probléma első teljes megoldását közölhettük, mely évtizedeken át ellentállt a matematikusok ostromának. A rendelkezésünkre álló hely azt is lehetővé tette, hogy több nagyobb összefoglaló referátumot közöljünk. Ezek természetesen nagyobb olvasóközönségre számíthatnak, mint a tisztára eredeti dolgozatok. Még tágabb köröknek szól a feladatok felújított rovata. E rovatot illetőleg máris sikerről szólhatunk, hiszen pl. a 2. feladatra nem kevesebb mint öt teljesen különböző beküldött megoldást közölhettünk és az 5. feladatra már eddig is 13 megoldás futott be. E rovatunk iránti érdeklődést számos tagtársunk levele is igazolja. Az ebben foglalt tanácsokért a kitüzendő feladatok mineműségét illetően stb. hálásak vagyunk és igyekezni fogunk őket figyelembe venni. Megjegyezzük azonban, hogy e rovatunkat — jobban mint elvi tanácsokkal — szép új feladatok és szép megoldások beküldésével véljük legjobban fellendíthetni. Jubiláris kötetünkben továbbá négy teljes doktori értekezést is közölhettünk; ezek közül kettő a budapesti, egy a kolozsvári, egy pedig a szegedi egyetemen nyujtatott be. Lapunk 49. kötetének első száma sajtó alatt van, több mint 200 oldalnyi terjedelemben. Remélhető, hogy a nyár folyamán szétküldésre fog kerülni.

Örömmel és köszönettel jelentjük be jubiláris gyüjtésünk egy elkésett adományát: a Magyar Általános Kőszénbánya R.-T. 1000 P-t adományozott Társulatunknak. Nagy hálával fogadtuk továbbá «néhai Reisz Jenő barátai»-nak 200 P-s adományát. A Választmány határozata szerint és a nemeslelkű adományozók intencióinak megfelelően ezt az utóbbi összeget alkalomadtán tanulóversenyeink díjainak felemelésére fogjuk fordítani.

Immár 11-edszer került sor a Kőnig Gyula jutalom kiosztására. Jubileumunk alkalmából az idén kivételesen két jutalmat osztottunk ki; ezeket Hajós György és Szőkefalvi Nagy Béla nyerték el. Köszönettel adózunk Rédei László és Veress Pál tagtársainknak, hogy az erről szóló jelentést, illetőleg a jutalmazottak nagyértékű tudományos munkásságának ismertetését és méltatását szívesek voltak megírni és előadni. Úgy mint 20 év óta, e jelentést is hamarosan közölni fogjuk lapunkban.

Tanulóversenyeinket idén már Kolozsvárott is megtarthattuk. Sikerük ez évben valamivel alul maradt a szokásoson, de azért a matematikai versenyen két második Eötvös-díjat kiadhattunk. Ezeket Ivancsó Imre és Schweitzer Miklós nyerték el.

A mait beleszámítva 12 előadóülésünk volt, melyeken 8 matematikai és 6 fizikai tárgyú előadást hallottunk. Külön meg kell emlékeznünk két kiváló külföldi vendégelőadónkról: W. Bothe heidelbergi és E. Bompiani római egyetemi tanárról. Bothe professzor a «Szellemi Együttműködés Szövetségének Magyar Egyesülete« és a mi Társulatunk közös vendégeképpen, Bompiani professzor pedig a budapesti Tudományegyetem meghívására jött Budapestre. Legyen szabad még kiemelnünk ma tartandó előadóülésünket, melyen közösen az «Istituto Italiano di Cultura per l'Ungheria»-val, halálának 300-adik évfordulója alkalmából, Galilei emlékének fogunk áldozni.

Társulatunk Tangl Károly-emlékérme elkészült és az aláíróknak megküldetett — öt példány híján, melyeket a mai anyagbeszerzési nehézségek folytán a művész eddig nem tudott szállítani. Az érem reprodukciója jubiláris kötetünket diszíti.

Taglétszámunk a jelen társulati év folyamán nem kevesebb mint 32 taggal gyarapodott. De, sajnos, veszteségeink is voltak. Elhúnytak Rucsinszki Lajos ny. főiskolai tanár, aki már Társulatunk alapításában részt vett és 92 éves kort ért meg, Kovács János ny. főiskolai igazgató, aki szintén 51 év óta tagja volt Társulatunknak, Szarvasy Imre, a Műegyetem kiváló kémia-professzora és Székely Károly ny. gimn. igazgató, Baján. Halottaink emlékét kegyelettel fogjuk megőrizni.

Jelentésünk végére hagytuk az év fájdalmas eseményét. Mélyen tisztelt elnökünk, Rados Gusztáv, akit 80-adik születésnapján betegsége miatt csak írásban üdvözölhettünk, s aki hosszú áldásos életének javát a mi Társulatunknak szentelte, gyöngélkedő állapotára és előrehaladott korára való tekintettel nem hajlandó többé az elnöki tisztet vállalni. Amidőn ebbe kénytelenek vagyunk belenyugodni, tesszük ezt abban a reményben, hogy hamarosan egészségesen fogjuk őt ismét Társulatunkban üdvözölhetni.

A titkári jelentés után Jelitai József pénztáros terjesztette elő pénztárosi jelentését, melyet alább közlünk. A számvizsgáló bizottság javaslatára a közgyűlés megadta a felmentvényt a pénztárosnak.

Végül a közgyűlés, közfelkiáltással elfogadva a Választmány javaslatát, a Társulat lelépő elnökét, Rados Gusztávot a Társulat tiszteleti tagjává választotta meg.

1941. évi zárszámadás.

Bevétel:

		Pengő
1.	Maradvány az 1940. évről	5846·05
2.	Tagdíj	1762·95
3.	Előfizetési díj	1164·65
4.	Tangl Károly-emlékérem	719·90
5.	Magyar Tudományos Akadémia segélye	1000·—
6.	Államsegély	750·—
7.	Adomány, kamat	6981·92
8.	Vegyes	72·98
	Összesen	18298·45

Kiadás:

		Pengő
1.	Nyomda	9429·12
2.	Tanulóverseny	60·—
3.	Tud. Társ. és Int. Orsz. Szöv. Díjkezelősége	169·96
4.	Írói, tisztviselői és előadói tiszteletdíj	2252·38
5.	Tangl Károly-emlékérem	893·06
6.	Vegyes	334·25
	Pénztári maradvány	5159·68
	Összesen	18298·45

Vagyon:

		Pengő
1.	Értékpapir 29,008 korona névértékben	—
2.	Alapítványok zárt postatakarékpénztári betétkönyvben	1402·—
3.	Klug Lipót geometriai alapítványa: 4800 aranykorona névértékű 1914. évi 4·5%-os fővárosi kölcsönkötvény postatakarékpénztári letétben, vételáron	4619·37
4.	Klug-alap maradéka és kamata 1941. dec. 31-ig	502·50
5.	Pénztári maradvány postatakarékpénztári betétkönyvben, csekkszámlán és kézi pénztárban	5159·68
6.	Tagdíjhátralék	200·—
7.	Hirdetési-díj követelés	100·—
8.	Nyomtatvány	100·—
	Összesen	12083·55

Teher:

	Pengő
1. Tartozás Franklin-nyomdának	70·78
2. Egyenleg	12012·77
Összesen	12083·55

Budapest, 1942. március 30.

Dr. Jelitai József s. k. pénztáros.

Megvizsgáltuk és rendben találtuk.

Budapest, 1942. május 21.

Dr. Goldziher Károly s. k. Dr. Renner János s. k.
Dr. Stachó Tibor s. k. Szabó Gábor s. k.

Előadások:

1941. nov. 6. Kalmár László: A szemlélettől az axiomatikus módszerig.

1941. nov. 13. A tanulóversenyek eredményének kihirdetése. — Veress Pál: Megjegyzés az idei matematikai tanulóverseny második feladatához. — Egerváry Jenő: Megjegyzés az idei matematikai tanulóverseny harmadik feladatához.

1941. nov. 27. Szolnoki Imre: Kommentár báró Eötvös Lóránd mozgásokozta súlyváltozásról szóló közléséhez.

1941. dec. 11. Alexits György: Ortogonális függvények szerint haladó sorok szummálhatóságáról.

1942. febr. 5. Kárteszi Ferenc: Egy Klug-féle torzfelületről.

1942. febr. 19. W. Bothe (Heidelberg): Einiges zur Spektroskopie der Atomkerne.

1942. márc. 19. Szűcs Adolf: Komplex számok egy kinematikai alkalmazása.

1942. ápr. 9. Rédei László és Veress Pál: Jelentés az 1942. évi Kőnig Gyula-jutalomról. — Pogány Béla alelnök átadta a jutalmakat Hajós Györgynek és Szőkefalvi Nagy Bélának. — Szőkefalvi Nagy Béla: Függvények megközelítése Fourier-soruk számtani közepeivel.

1942. ápr. 23. Hajós György: Hibabecslés táblázattal végzett számításoknál.

1942. ápr. 30. Enrico Bompiani (Roma): Géometrie riemannienne d'espèce supérieure.

1942. máj. 21. Szalay Sándor: A legkisebb rendszámú atommagokban polonium α-sugaraival gerjesztett γ-sugárzásról.

1942. máj. 30. (Az «Istituto Italiano di Cultura per l'Ungheria»-val közösen tartott ünnepi ülés Galilei halálának 300. évfordulója alkalmából). ORTVAY RUDOLF: Galilei és az újkori tudományos gondolkodás kibontakozása.

*

Választmányi ülések voltak: 1941. nov. 13., 1942. febr. 7., ápr. 9. és május 21.

Az 1942. évi XLVII. közgyűlés volt: 1942. május 30.

*

Uj tagok:*

Békésy György, egy. ny. rkiv. tanár, Budapest.
*Bor Pál, egy. gyakornok, Szeged.
Borbély Samu, egy. adjunktus, Kolozsvár.
*Dezső Loránt, asszisztens, Kolozsvár.
*Dombi József, egy. gyakornok, Szeged.
*Feldheim Ervin tanár, Budapest.
*Gróf Festetics Sándor, földbirtokos, Dég (Veszprém vm.).
Gáspár Rezső, egy. gyakornok, Pestszenterzsébet.
*Kelemen Szulpic O. S. B. főisk. tanár, Pannonhalma.
*Kolbenheyer Tibor, tanárjelölt, Budapest.
*Komjáthy Aladár, min. tanácsos, Budapest.
Krausz József, okl. középisk. tanár, Budapest.
*Kulin György, asszisztens, Budapest.
László Zoltán, egyet. tanársegéd, Budapest.
*Lázár Dezső, középisk. tanár, Kolozsvár.
*Mintyán László, gimn. tanár, Székesfehérvár.
*Nagy István, gimn. tanár, Marosvásárhely.
*Náray-Szabó István, műegy. ny. r. tanár, Budapest.
*Nemes Béla, egy. gyakornok, Szászfenes.
*Pápai Nárcisz, bencés tanár, Győr.
Polesinszky Jenő, áll. tanítóképző igazg., Csáktornya.
*Sas Ernő, tanár, Újpest.
*Sólyi Antal, tanár, Újpest.
*Strommer György, gépészmérnökjelölt, Budapest.
*Szádeczky-Kardoss Géza, műegy. hallgató, Budapest.
Szalay Sándor, egy. ny. rkiv. tanár, Debrecen.

---

* A *-gal jelöltek már szerepelnek lapunk utolsó kötetének függelékeként közölt tagjegyzékben.

*Szele Tibor, egy. tanársegéd, Szeged.
*Szélpál István, középisk. tanár, Szeged.
*Szombathy Miklós, tanítóképzőint. tanár, Jászberény.
*Török Sándor középisk. tanár, Kolozsvár.
*Vajk Raul, egyet. magántanár, Budapest.
*Varga Ottó, egyet. intézeti tanár, Debrecen.

Meghaltak:

Dr. Kovács János, ny. főiskolai igazgató, Budapest.
Rucsinszki Lajos, ny. főiskolai tanár, Budapest.
Dr. Szarvasy Imre, műegy. ny. r. tanár, Budapest.
Székely Károly, ny. gimn. igazgató, Baja.

Kimutatás

az 1941. évi október 1-től 1942. évi április 30-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

1927-re: Bay Zoltán (6), Blau Ármin (2), Bresztovszky Béla (8), Csada Imre (6), Csaplár Konrád (6), Cseh Elekné (8), Fejér Lipót (8), Frank János (6), Fraunhoffer Lajos (8), Girsik Géza (5), Heuer Ede (8), Horvay Béla (8), Jakab Györgyné (4), Kedves Miklós (2), Kilczer Gyula (6), Kronberger Ede (8), Marczell György (8), Neogrády Sándorné (8), Oltay Károly (5), Radó Simon (8), Reuss Endre (5), Sebők Emánuel (6), Sós Ernő (8), Székely Károly (6), Theisz Edéné (4), Zipernovszky Károly (6.35).

1928-ra: Baintner Géza (8), Bay Zoltán (6), Bresztovszky Béla (2), Cholnoky Jenő (8), Csada Imre (6), Csaplár Konrád (6), Fejér Lipót (8), Hausbrunner Vilmos (8), Kronberger Ede (2), Marczell György (8), Neubauer Konstantin (5), Radó Simon (2).

1929-re: Bay Zoltán (6), Cholnoky Jenő (7), Fejér Lipót (8), Fekete Jenő (4), Marczell György (8), Patai László (5), Skopál István (8), Walek Károly (2).

1930-ra: Bay Zoltán (6), Bischitz László (4), Fejes Zsigmond (6), Fejér Lipót (8), Fekete Jenő (4), Magi Ferenc (6), Marczell György (8), Radó Simon (8), Seres Iván (2), Walek Károly (6).

1931-re: Bay Zoltán (6), Bischitz László (4), Fejér Lipót (8), Ferenczy Zoltán (2), Hausbrunner Vilmos (7), Sebők Emánuel (6).

1932-re: Bischitz László (2), Fejér Lipót (8), Ferenczy Zoltán (4), Holenda Barnabás (6), Vörös Cyrill (8).

1933-ra: Császár Elemér (8)

1934-re: Császár Elemér (8).

1935-re: Császár Elemér (8).

1836-ra: Császár Elemér (8), Fröhlich Pál (4).

1937-re: Császár Elemér (8), Fröhlich Pál (6), Skopál István (8), Szűcs Adolff (8).

1938-ra: Császár Elemér (8), Fröhlich Pál (6), Lajta Ernő (4), Szűcs Adolf (8), Walek Károly (6).

1939-re: Bay Zoltán (8), Császár Elemér (6), Fejér Lipót (8), Ferenczy Zoltán (6), Fröhlich Pál (6), Lajta Ernő (8), Maróthi Ferenc (5), Neubauer Konstantin (8), Rybár István (8), Schimanek Emil (8), Veress Pál (2).

1940-re: Bay Zoltán (8), Császár Elemér (6), Fejér Lipót (8), Fröhlich Pál (6), Kövesligethy Radó (0.5), Lipka István (6), Magi Ferenc (6), Misángyi Vilmos (8), Nagy Ferenc (8), Neubauer Konstantin (8), Orbán György (6), Papp Margit (8), Patai László (4), Rybár István (8), Schimanek Emil (8), Tobisch János (2), Tóth Géza (8), Veress Pál (3).

1941-re: Bacsó Vilmos (6), Bakos Tibor (6), Barnóthy Jenőné (8), Barta József (8), Bay Zoltán (8), Bán Lajos (6), Blau Györgyné (8), Bolla Györgyné (8), Boros János (6), Bukovszky Ferenc (6), Csada Imre (3), Csaplár Konrád (6), Császár Elemér (6), Cseh Elekné (8), Cseke Vilmos (6), Csizhegyi Lajos (6), Darkó Béla (6), Egyed László (4) Faragó Tibor (6), Fejes Zsigmond (6), Fejér Lipót (8), Feldheim Ervin (8), gróf Festetics Sándor (6), Frank János (6), Fröhlich Pál (6), Gausz József (6), Hajós Géza (6), Halász Ernő (8), Holenda Barnabás (6), Horvay Béla (8), Jakab Györgyné (4), Jendrassik György (8), Kedves Miklós (6), Kilczer Gyula (8), Komjáthy Aladár (8), Kónya Albert (6), Kövesligethy Radó (8), Lipka István (6), Magi Ferenc (6), Marczell György (8), Mátrai Lászlóné (8), Megyesi István (8), Misángyi Vilmos (8), Mitnyán László (6), Szőkefalvi Nagy Béla (6), Nagy Ferenc (8), Szőkefalvi Nagy Gyula (6), Orbán György (6), Pancratz Edit (6), Papp Margit (8), Renner János (8), Rédei László (6), Rybár István (8), Sas Ernő (6), Schaller Mátyás (6), Schay Géza (8), Seres Iván (8), Somogyi Antal (8), Sólyi Antal (6), Steiner Lajos (6), Szántó Sándor (8), Szele Tibor (6). Tardos Vida (6), Tobisch János (8), Tolnai Jenő (8), Varga Dezső (6), Varga Zoltán (6), Vámos Sándor (6), Vincze István (3), Zányi László (2).

1942-re: Baczoni Jenő (8), Bay Zoltán (8), Békésy György (8), Blau Ármin (6), Erdős Pál (8), Farkas Dénes (6), Fejér Lipót (8), Feldheim Ervin (8), gróf Festetics Sándor (6), Frank János (2), Goldziher Károly (8), Gombás Pál (6), Ispánovits Alajos (6), Jelitai József (8), Kelemen Szulpic (6), Koczkás Gyula (6), Kövesligethy Radó (6.61), Kövessi Ferenc (8), Kulin György (6), Kuzaila Péter (6), Lassovszky Károly (8), Lázár Dezső (6), Luckhaub Gyula (6), Marczell György (8), Szőkefalvi Nagy Gyula (6), Nagy István (6), Náray-Szabó István (8), Ortvay Rudolf (8), Pápai Nárcisz (6), Péter Gyula (8), Pogány Béla (8), Polesinszky Jenő (6), Rados Ignác (8), Renner János (8), Romsauer Lajos (8), Rucsinszki Lajos (8), Rybár István (8), Sarkadi Károly (8), Sas Ernő (6), Szabó László (6.2), Szabó Miklósné (8), Szádeczky-Kardos Géza (8), Szántó Fidél (6), Szántó Sándor (8), Székely Károly (6), Szélpál István (6), Vajk Raul (8), Varga Ottó (6).

1943-ra: Bauer Mihály (8), Blau Ármin (6), Szőkefalvi Nagy Gyula (6), Rybár István (8).

2. Előfizetés.

Békéscsabai Rudolf-gimn. (8), Budapesti izr. gimn. (8), Budapesti ref. gimn. (8), Debreceni ref. gimn. (6), Egyetemi Nyomda könyvk. (12), Ferenc József Tanítók Háza (8), Ganz Villamossági R.-T. (32), Kalazantinum (16), Kassai premontrei gimn. (12), Kilián Frigyes (16), Kiss A. (6), Kisújszállási ref. gimn. (6), Klökner Péter (6), Lévai áll. liceum (6), Miskolci ref. gimn. (6), Molnár könyvk. (6), Norbertinum (26), Pannonhalmi közp. könyvtár (6), Soproni műegyetemi könyvtár (6), Szegedi polgári tanárképző főiskola (6), Technologiai intézet könyvtára (8), Természettud. Társulat (32), VKM 97 áll. gimn. (776), M. Kat. Tanulm. Alap 6 kir. kat. gimn. (48).

3. Segély, adomány.

Klug Lipót (8), Nagy L. József (10), M. T. Akadémia 1942. I. (500), M. Ált. Kőszénbánya (1000), néhai Reisz Jenő barátai (200), Szabó Gábor (8).

Budapest, 1942. május 14.

Jelitai József, pénztáros.

Felelős kiadó: **Ortvay Rudolf.**
2893. Franklin-Társulat nyomdája. — vitéz Litvay Ödön.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA – VITÉZ LITVAY Ö.

MATEMATIKAI
ÉS
FIZIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KŐNIG DÉNES és ORTVAY RUDOLF

XLIX. KÖTET

1942

JÚLIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST, 1942

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

Oldal

Stachó Tibor és Pogány Béla gyászbeszédei Rados Gusztáv ravatalánál (1942. nov. 5.) 225
Kornis Gyula: A matematika nevelő hatása 230
Fejes László: Az egyenlőoldalú háromszögrács mint szélsőérték-feladatok megoldása 238
Molnár József: Egy elemi geometriai szélsőértékfeladat 249
Borbély Samu: Lövedékek ellenállásának hidrodinamikai megközelítő meghatározásáról 254
Tarnóczy Tamás: A hangzóképzőüregek rezonanciaadatai 274
Kitűzött feladatok 291
Megoldott feladatok 292
Irodalom 302
Tanulóversenyek 304
Pénztárosi kimutatás a befolyt összegekről 310

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a matematikai tárgyúak *Kőnig Dénes* **(XI., Horthy Miklós-út 28., Lénárt-pensio)**, a fizikai tárgyúak pedig *Ortvay Rudolf* **(VIII., Múzeum-körút 4/c**, Egyetemi elméleti fizikai intézet) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek, és hogy arra, valamint minden korrekturára pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Ortvay Rudolf* titkár címére küldendők.

Évi tagsági díj Budapesten 8, vidéken 6 pengő. Minden befizetést Társulatunk 5997. számú postatakarékpénztári csekkszámlájára kérünk. A folyóirat és a meghívók küldésére vonatkozó felszólamlások, címváltozások *Jelitai József* pénztáros címére (II., Bimbó-út 5.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des geschäftsführenden Sekretärs *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/*c*.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du secrétaire *R. Ortvay*, Budapest, VIII., Múzeum-körút 4/*c*.

RADOS GUSZTÁV

1862 febr. 22.—1942 nov. 1.

STACHÓ TIBOR mérnök és építészmérnökkari dékán gyászbeszéde.

A József nádor műszaki és gazdaságtudományi egyetem Tanácsa, valamint mérnöki és építészmérnöki Kara nevében, mint matematikus és — az Úr szolgája után — mint egyszerű gyászoló kérek részt a szertartás komor rendjében e ravatal előtt, melyen egykori Műegyetemünk 1911—14. tanévi rektora, ezt megelőzően négy éven át a mérnöki és építészi, követően pedig három évig a közgazdasági osztálynak dékánja, több mint négy évtizeden át nyilvános tanárunk, hazánk vezető matematikusainak nesztora: RADOS GUSZTÁV nyugszik.

Gyászoló közönség, e ravatalnál a Zsoltáros szavait: Az ember élte hetven esztendő, s ha több, mégpediglen nyolcvan, e többlet szenvedés és bánat — joggal idézhetjük. Mert, bár akit gyászolunk az Úr szigorából patriarkák korába emelkedő élte alkonyán a Consummatum est komor valóságát nem egyszer átélte, első hetven éve az Úr különös kegyelmével volt áldott.

Emlékezzünk!

RADOS GUSZTÁV műegyetemi és egyetemi tanulmányait Budapesten befejezve és Lipcsében F. KLEINnél elmélyítve párját ritkító fiatalon, 23 éves korában lépett magántanár- és repetitorként a Műegyetemen a tudomány szolgálatába.

A figyelmet magára tudományos készültsége, éles elméje és lankadatlan szorgalma mellett kétségtelenül első dolgozata hívta fel. Ebben a mestere, KŐNIG GYULÁtól sejtett és a törzsszámmodulusú magasabbrendű kongruenciák legalább egy, illetve adott számú inkongruens gyökére vonatkozó «meglepően elegáns» kritériumnak szükséges és elégséges voltát bizonyította be oly alaki és számítási készséggel, melyet nem kisebb, mint a berlini KRONECKER — az újkori matematika első kétkedője — is elismert. E dolgozatnak eredményeit RADOS GUSZTÁV később több ismeretlen esetére is kiterjesztette. Egyáltalában a magasabbrendű kongruenciák elméletére még többször visszatért, így két ily kongruencia közös, majd egy kongruencia többszörös gyökeinek feltételét megállapította, egy k-gyökű kongruenciával azonos gyökű k-adfokú kongruenciát előállított, végre a kéttagú kongruenciákra vonatkozó vizsgálataival jelentékeny irodalmat indított meg.

1910 óta STEINITZnek a számtestekre vonatkozó elméletével ma e gondolatkört már egyszerűen áttekintjük, de ez a mult század úttörőinek, köztük RADOS GUSZTÁVnak érdemeit nem csökkenti. A matematika tételei éppen örökérvényűek és csak igazolásuk, beállításuk, alkalmazásuk módja változó. Különben is a tudomány legszebb feladata az, hogy a tegnap paradoxonát a holnap trivialitásává tegye.

Ebben a szellemben kell megemlítenünk ama alaki determinánstételeket is, melyekkel RADOS GUSZTÁV az Akadémia nagy jutalmával kitüntetett 1929. évi dolgozatával bezáróan több ízben foglalkozott s melyek nemcsak az algebra és számelmélet terén végzett saját vizsgálatainál, hanem az összetett számtestekre vonatkozó újabb kutatásoknál is alkalmazást nyertek.

Egy ilyen a szorzathelyettesítések elméletében játszik szerepet s így RADOS GUSZTÁVnak másik — nemzetközi figyelmet keltett — munkakörére, a matrixok s az ezekkel kapcsolatos kettősen elsőfokú, illetve másodfokú alakoknak, szorosabban az adjungált s az indukált helyettesítéseknek elméletére vezet. E körben RADOS GUSZTÁVnak a jellemző egyenletek gyökei közti kapcsolatokra, a helyettesítések csoportjellegére, az adjungált, illetve indukált alakok azonos előjelkészletére vonatkozóan vannak oly eredményei, melyek már a mult század utolsó évtizedében a 29 éves rendkívüli s a 31 éves rendes tanár vizsgálataiban jelentkeztek, és még a 77 éves nyugalomba vonultnak közleményeiben is érdekes kiegészítést nyertek.

Ha itt e komor percek követelte tömörséggel csak megemlítem, hogy RADOS GUSZTÁV a körosztás, a négyzetes maradékok, az algebrai és elliptikus, valamint a független függvények és a trigonometrikus polinomok elméletét szép tételekkel gazdagította s figyelmét a differenciálgeometriára, az analitikus számelméletre s az ismételt integrálásra is kiterjesztette, akkor a megboldogultnak még csak egy, kutató mivoltáról emlékeztem meg, melynek elismeréséül a Magyar Tudományos Akadémia 1894-ben levelező, 1907-ben rendes, 1937-ben pedig tiszteleti tagjává választotta és a kolozsvári Ferenc József Tudományegyetem díszdoktorává avatta.

De fel kell itt idéznem a kezdetben változatos tárgykörű, majd a századforduló óta az Analizis és geometria II. folyamát s a Számelmélet, illetve az Algebra elemeibe bevezető két előadását mintegy klasszikus alakban kijegecesítő tanárnak s a kitűnő előadónak emlékét, tisztemből kifolyóan példakép magam s utódaim elé kell tűznöm az évek során át fáradhatatlan, osztályát odaadóan szolgáló, bölcsen vezető s méltóan képviselő dékánt, tanácsi megbízatásom kapcsán ki kell emelnem az egykori rektort, kinek működéséhez a régi Műegyetem közgazdasági osztályának felállítása s egy Műegyetemi Diákotthon első szorgalmazása fűződik. Nem feledkezhetem meg a Műegyetemnek évek hosszú során át volt könyvtárnokáról, ki a műszaki tudományok s a művészetek irodalmának gondos szemmeltartása mellett egy nemzedéket nevelő, színvonalban és teljességben a göttingenivel vetekedő matematikai könyvtárt létesített egyetemünkön. Ennek emléke s a trianoni hanyatlás keserű ismerete vezette kétségtelenül akkor is, mikor halálos ágyán féltett kincsét, gazdag könyvtárát és értékes különlenyomatgyüjteményét egykori tanszékére hagyta, melyért a Tanács háláját már csak itt tolmácsolhatom.

A fogyó gyertyák lobogó fényében még csak az emberről emlékezem meg, kit végleg elvesztettünk. Azzal a tárgyilagossággal, mely kimagasló tulajdonsága volt, s azzal a tapintattal, melyet magánéletében visszavonult, szerény egyénisége haló porában is megkövetel.

RADOS GUSZTÁV határozott egyéniség volt. Éles elméje, körültekintő, higgadt ítélete véleménye megtartását — az ellenvélemény türelmes meghallgatása után is — lehetővé tette. A közügyek vezetésében feltétlen odaadást, igazságosságot, szorgalmat tanusított és követelt. Mulasztást el nem nézett. Tekintélyt tisztelt és tartott.

Hazafias érzületében megingathatatlan s messzemenően áldozatkész volt.

Tudományszeretete mellett a művészeteknek, elsősorban a zene s képzőművészeteknek komoly kedvelését kell megemlíteni.

Embertársai iránt udvarias, tanítványai s fiatal szaktársaival szemben megértő és jóakaratú volt.

Kongeniális élettársához a síron túl is ragaszkodott, gondos és szerető családatya volt.

Gyászoló közönség, veszteségünkről megilletődötten emlékezem. Rados Gusztáv, tisztelt tanár- és pályatársunk, nyugodj békében.

Isten Veled!

POGÁNY BÉLA a M. Tud. Akadémia r. tagja, az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat elnökének gyászbeszéde.

A Magyar Tudományos Akadémia és az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat utolsó üdvözletét hozom e ravatalhoz. Rados Gusztáv mindkét testületnek buzgó, lelkes, munkás tagja volt. A M. Tud. Akadémia az imént ismertetett tudományos kutató munkássága elismeréseül már 1894-ben levelezőtagjai sorába választotta, majd 1907-ben rendes, 1937-ben tiszteleti tagja lett, miután egy évvel előbb az Akadémia a Nagyjutalom pálmáját nyujtotta feléje. Még a legutolsó években is sűrűn üdvözölhettük a III. osztály ülésein az előadói asztalnál. De sok évtizedes lankadatlan tudományos, kutató működésén kívül is jelentős szerepet vitt Akadémiánk életében.

Miután 1902-ben Bolyai János születésének századik évfordulóján a Magyar Tudományos Akadémia nagyszabású nemes gesztust tett a nemzetközi szellemi együttműködés terén a Bolyai-jutalom alapításával, az első díj odaítélésére 1905-ben kiküldött nemzetközi bizottság — melynek elnöke Gaston Darboux volt, a párizsi Académie des Sciences örökös titkára s melynek tagjai között tisztelhettük a német matematika büszkeségét, FELIX KLEINt — RADOS GUSZTÁVot választotta előadójául, ki nagyszabású előadói jelentésében mesterien analizálta és méltatta a díj odaítélése szempontjából tekintetbe jövő két szellemóriás: HENRI POINCARÉ és DAVID HILBERT tudományos működését.

RADOS később is többször szerepelt összes üléseinken, nagyjaink emlékét idézve az Akadémia megbízásából. Így emlékbeszédet mondott KRONECKER, KŐNIG GYULA, FELIX KLEIN, KÜRSCHÁK JÓZSEF és mások felett.

A Matematikai és Fizikai Társulatnak pedig már bölcsőjénél ott állott RADOS GUSZTÁV. Már 1885 óta titkári szerepet töltött be annál a magánjellegű Matematikai Társaságnál, melyből 1891-ben b. EÖTVÖS LORÁND, KŐNIG GYULA és SZILY KÁLMÁN kezdeményezésére hivatalosan is megalakult a Matematikai és Fizikai Társulat, mely RADOS GUSZTÁVot titkárának választotta. E minőségében 22 éven át szerkesztette a Társulat folyóiratának, a Matematikai és Fizikai Lapoknak matematikai részét. Rendkívüli odaadással töltötte be e tisztét, aminek nem kis része volt abban a nemzetközi viszonylatban is hatalmas fellendülésben, mely a magyar matematikában ebben az időben megindult. KŐNIG GYULA halála után 1913-ban a Társulat alelnöke, 1931-ben pedig elnöke lett. Társulatunk ügyeit mindenkor legmelegebben szívén viselte.

Személye iránti nagyrabecsülését Társulatunk már életében kifejezte: 70-ik születésnapján folyóiratunk ünnepi Rados-füzetet bocsátott közre; 80-ik születésnapján már csak levélben üdvözölhettük.

A Mindenható még megengedte neki, hogy Társulatunk 50 éves jubileumi ünnepi ülésén elnökölhessen, de ez volt utolsó szereplése Társulatunk nyilvánossága előtt.

Midőn a tanítvány hálás tiszteletével búcsúzom RADOS GUSZTÁVtól, ígérhetem, hogy mind a M. Tud. Akadémia, mind a Matematikai és Fizikai Társulat hálás kegyelettel fogja munkás, tudós életének emlékét őrizni.

A MATEMATIKA NEVELŐ HATÁSA.

Megnyítóbeszéd a középiskolai matematikai tanárok számára a Budapesti Középiskolai Tanárképzőintézettől rendezett nyári továbbképző tanfolyamon 1942. június 23-án.

Tisztelt Hölgyeim és Uraim!

Szívből üdvözlöm Önöket, akik egy esztendei tanítás hosszú fáradalma után idejöttek, hogy maguk is tovább tanuljanak. A nyári továbbképző tanári tanfolyamoknak az a céljuk, 1. hogy a szaktudományok újabb eredményeit bemutassák, 2. hogy az egyes szaktudományok tanításának módszertana köréből az újabb áramlatokat ismertessék. Önök nyári szellemi fegyvergyakorlatra vonultak be, a szellem fegyvereit élesítik, míg más kartársaik katonai gyakorlatra vagy egyenest a harctérre mentek.

Agg szó, de való: csak az tud jól tanítani, aki bőviből merít s tudományának haladását folytonosságban átéli. Sok ilyen magát soha befejezettnek nem hívő, állandóan ismeretszomjas és szellemi látóhatárát folyton tágító tanárunk van; hisz a filiszterrel szemben az igazi kultúrembernek éppen az a jellemző jegye, hogy sohasem érzi magát késznek, mindig kíváncsi s szellemét fejleszteni vágyó marad. Az életerő elvesztésének, a közeledő szellemi halálnak jele, amikor már az ember apatikus, nem kíváncsi, semmi iránt sem érdeklődik, ami hajdan lelkét feszültségbe hozta.

Vannak olyan tanáraink is, akik oklevelük megszerzése után az iskolakönyvön és az újságon kívül alig olvasnak valamit. Ez nyilván belső szellemi elernyedésre, lelki elszegényedésre vezet: az ilyen tanár a tankönyvszagú ember, *homo unius libri.* Nem ismeri szaktudományának újabb eredményeit: helytelen s már régen elavult dolgokat tanít. Hiányzik belőle az üde lelkesedés, a szuggesztív erő, az indító lelki készség, új szempontok friss látása: a kátyúk kultuszát űzi, elméje berozsdásodik, betokosodik, elszuvasodik, szelleme érelmeszesedésben szenved. Ha pedig a tanár szelleme csendes nyugalomban van, akkor nem tudja a többi elméket sem megmozdítani, az igazság megismerésére törő akaratot tanítványaiban éleszteni. Hisz ezek romantikus ifjú lelke főkép személyekben s ezek konkrét qualitásaiban gondolkodik s nem elvont művelődési ideálokat szerkeszt. Eszményük elsősorban a jó és tudós tanár, akinek ajkán örömmel csüngnek.

Azt mondhatja valaki, hogy a tudomány újabb és legújabb eredményeire nincs szüksége a tanárnak az iskolában, ahol már csak a történetileg leszűrt klasszikus ismereteket kell tanítani. Azonban a tanár az ő iskolai munkájának csak úgy tud megkapó tartalmat és sugalló mélységet kölcsönözni, ha *egész* tudományos személyiség, ha továbbra is benne él a tudomány élő, fejlődő világában. Kínos dolog lenne a tudományt ketté vágni: íme, ez klasszikus, kánonszerű iskolai anyag — ez meg tiszta tudomány. Milyen elmegerjesztő hatású a tehetségesebb ifjakra egy-egy kipillantás, az iskolai anyag szellemi vonalának továbbhúzása, egy-egy okos exkurzió. Ez persze nem azt jelenti, hogy egyetemi előadást tartsunk, hanem csak azt, hogy *qui capere potest, capiat.* Ennek a tanfolyamnak van olyan módszertani előadása, amely erre éppen példát akar adni: hogyan és mily mértékig kell a mikrofizika eredményeit a gimnáziumban előadni. Az ilyen legújabb eredményekből az ifjak megérzik az élő tudomány lehelletét s lélekben emelkednek. Megérzik ilyenkor azt is, hogy a tanár több, mint merőben tanügyi mesterember, puszta *amousos anér,* valami Schulfuchs. A tanár imponál, anélkül, hogy tudásával kérkednék; természetes módon ismeretszomjúságot sugalmaz, anélkül, hogy a tanulók az ő szándékát külön észrevennék. Így szépen egyesítheti személyiségében a tanár a tudományos gondolkodást és a tanító tevékenységet.

*

Tisztelt Hölgyeim és Uraim!

Fonák helyzetben vagyok: én, a nem szakmatematikus, aki csak filozófiai műveltségem perifériáján foglalkoztam matematikával, olyan vakmerő vagyok, hogy a matematikusoknak akarom magyarázni szaktárgyuk nevelő hatását, amikor Önök gyakorlatukban folyton ennek szemtanúi és fejlesztői. Mégis megteszem, ha egyéb hasznuk nem lesz is belőle, mint egy kis tudatosságra ébresztő rekapituláció. Másrészt mintegy megokolása annak, miért vet a Tanárképzőintézet, amelynek elnöke vagyok, oly különös súlyt a matematikai oktatás színvonalának emelésére.

A matematikai tanulmánynak különösen négy nagy előnye van a tanulók szellemi világképének kibontakoztatásában.

1. Itt az ész csak magamagából merít s lényegében független minden külső eszköztől. Itt nincs szükség semmi idegen tárgyra, anyagra, készülékre, kísérletre. Mivel a matematika a mennyiségi relációkat csupán észből konstruálja s ismeri fel igaznak, egyetlen más tudomány sem érteti meg oly szembeszökő módon azt a világnézetünkben sarkfogalomként szereplő gondolatot, hogy *van megismerhető igazság.* Minden szkepszissel szemben mindig a matematikai evidencia a magában érvényes igazság bizonyítéka és a többi tudomány előtt ragyogó modell. Minden relativisztikus világnézeti törekvéssel szemben, amely a szilárd világfelfogást szétzülleszti, a matematikai megismerés volt az eszmény. Nem véletlen, hogy a matematikus Platon, Descartes, Bolzano, Husserl védelmezte meg a szkepticizmussal szemben a *Wahrheit an sich* fogalmát: a mi lelki tevékenységünktől, gondolkodási aktusainktól függetlenül *vannak igaz objektív tartalmak.* Az ideális tárgyakat vizsgáló matematikával szemben a valóságot kutató, ú. n. reális tudományok természetszerűen már kevésbbé szembeszökő módon tudják az igazság tárgyi érvényét megvilágítani. A matematika ideális tárgyú gondolatok birodalma, amely a legtökéletesebb logikai összhangban egyesíti az ész legelvontabb alkotásait, még-pedig objektív ervényességgel. Innen a matematikának nemcsak *világnézeti,* hanem magasrendű *esztétikai,* harmóniára nevelő hatása is, amelyről egész himnuszt zeng Poincaré. (*Science et Méthode.* 1908.)

2. A görögöktől, főkép Platontól kezdve ismeretes a matematikának hatalmas *formai-logikai, észcsiszoló, nevelő* ereje. Platon szerint a matematika a tudományok propedeutikája. Akadémiája kapujára írja: Senki se lépjen ide be, aki nem geométer! Miért éppen

a matematika a legjobb bevezetés a tudományos gondolkodásba? Mert a tudományos gondolkodás itt lép elénk legegyszerűbb, legátlátszóbb, legmintaszerűbb alakjában. Az ész itt pompázik teljes erejében: néhány definícióból vagy axiomából kiindulva, a gondolatoknak egész zárt logikus rendszerét magából szövi ki. A matematika az immanens logikai észhasználat művészete. Itt ismeri meg igazában a tanuló a fogalmi megismerés erejét a definíciók élességében s a bizonyítás szigorúságában. Itt tanul meg esze igazában tisztán és exaktan munkálkodni. Itt élvezi igazán a tanuló a fölfedezésnek, a valamire önerején való rájutásnak dinamikus logikai gyönyörét: valamit evidensen fenékig átlátni s az igazságot meghódítani.

Már Aristoteles fölveti a Nikomachosi Ethikában (VI. könyv, 1142*a*) a kérdést: «Miért van az, hogy matematikus esetleg gyermek is lehet, bölcs és természettudós azonban nem? Vajjon nem azért-e, mert a matematika elvont tudomány, ellenben a bölcselet és a természettudomány kiindulópontjai a tapasztalatból származnak, s mert ez utóbbiakat a fiatal elme nem meggyőződésből vallja, hanem csak úgy hangoztatja, míg amazoknak (t. i. a matézisnek) a lényegét világosan megérti?» (Szabó M. ford.) Valóban, a matematika tárgyai észszerűek, az ész törvényei pedig gyermeknél és aggastyánnál ugyanazok. Számos ifjú matematikai teremtő lángelme van, a természetbúvárlatban alkotó géniusz csak később bontakozhatik ki, amikor már tapasztalatra tett szert. A matematika ellenben csak gondolkodást kíván az ifjútól: néhány előfeltétele van, ezeket vonatkoztatja, hasonlítja, kapcsolja és kombinálja. A matematikának ebből a racionális-formális természetéből folyik a többi tárgyakétól elütő didaktikai természete és nevelő jelentősége.

3. De ne higyjük, hogy csak ennek a formális nevelő erőnek fokozása a cél. *A matematika a valóság tárgyaira alkalmazást is nyer:* segítségével a valóságot előre ki tudjuk számítani egészen az égbolt ismeretlen csillagaiig (l. a Neptunus helyének kiszámítását s később e bolygó megtalálását). Az elme spekulatív szempontjai a matematika útján csodálatosan alkalmazhatók a valóságra: az észnek matematikai kategóriarendszere és szintézise nem idegen a világ tárgyaitól, hanem conformis velük, alkalmazható rájuk, általa a

természet tüneményei anticipálhatók. A természettudományok *savoir c'est prévoire* elvének a matematika a közvetítője, a természeti törvényszerűségek megformulázója, egyszerű és exakt formába öntője. Így a matematikai oktatás szorosan összeszövődik a természettudományi oktatással, nem hiába mondotta GALILEI: a természet könyve matematikai nyelven van megírva.

A matematikát tehát nemcsak a logikai képzés, az észcsiszolás céljából tanítjuk, hanem fontos *tárgyi* értéke miatt is: tárgyszerű törvényes kapcsolatok kifejezésmódjai céljából. Csak egy példát. Miért vezettük be 1924-ben az infinetezimális számítás alapgondolatát a gimnáziumba, miután a tantervben fokozatosan ráneveljük a tanulót, grafikai ábrázolás útján is, a függvényszerű gondolkodásra? Azért, mert a modern természettudományi tárgyi világkép kialakításának az infinetezimális számítás nélkülözhetetlen eszköze.

4. A matematika elsősorban az észt gerjeszti-fejleszti, formálisan csiszolja, de emellett az *akaratot* is rendkívül neveli és erősíti. A matematikai feladatok megoldása ugyanis erős, szándékosan koncentrált, odaadó figyelmet kíván, nehézségek legyőzését, fejtörést, gondolatfájást okoz. Ezzel az ifjút *öntevékenységre* szoktatja, önmunkásságra ingerli. Ez egyik legfőbb nevelő, mondhatnók: etizáló hatása. Itt nem lehet a tanulónak a maga dolgát akárhogyan, felületesen végeznie, külsőleg valamit gépiesen, komolyabb elmefeszítés nélkül megtanulnia: itt eszének evidenciájával a tárgy alkatába be kell hatolnia, az összefüggéseket, mennyiségi relációkat, magának önerején átlátnia. A matematikai belátás senkire külsőleg, puszta memorizálással, nem akasztható: benső szellemi öntevékenységet, személyes erőkifejtést követel.

Mi következik ebből az ifjú egész későbbi életére? Olyan szellemi habitus, amely nem elégszik meg a dolgok felületes szemléletével, az indokolatlan, «hasból» való állításokkal, üres és tartalmatlan frázisokkal, hanem mindig mindent töviről-hegyire át akar látni, megokolni, végiggondolni, az összes következményeket levonni. A matematikailag kiművelt elme logikailag mindig érzékeny és szemérmes: semmit sem mer gondolni *ratio sufficiens* nélkül. A matematikai gondolkodásnak az eredményben mindig megvan a maga szankciója: az evidencia próbakövén valamely állítás vagy igaz, vagy nem igaz, itt szólamokkal nem lehet csalni. A jó matematikai oktatásnak így nem csekély kihatása van a nemzet közéletére is, mert a társadalomnak a középiskolából kikerülő vezető rétege lelkébe beleépíti a komoly megokolás, a szigorú bizonyítás lelki szükségletét s távoltartja az üres fecsegéstől, a jelszavaknak, a merőben «érzelmes eszméknek» demagóg uralmától: erősen fokozza a vezetőréteg logikai lelkiismeretét.

Viszont az sem tagadható, hogy az egyoldalú, más területekre is átvitt matematikai gondolkodásmód hajlamossá tesz a valóságos élettel szemben való túlságos merevségre: merőben racionalistává formálja az elmét, amely azt hiszi, hogy a társadalom is — a történeti folytonosságot megszakítva — pusztán észből, *more geometrico,* egy csapásra újjászervezhető és megjavítható. Innen a matematikus társadalomfilozófusok erős hajlama, a gondolkodás történetének tanusága szerint, az utópiára. Ősük a matematikus Platon, aki az ideális állam eszményének, mint valami molochnak oltárán feláldozza az emberi lélek legszentebb érzelmeit: a szerelmet és a családi érzést is. Közismert a tipikusan egyoldalúan gondolkodó, «rideg» matematikusok makacssága és merevsége az élet gyakorlati kérdéseiben. A történelmi-irodalmi anyagon tájékozódó gondolkodás mozgékonyabb, az élet ráncaihoz jobban símul, több a fogékonysága az élet irracionális erői iránt. A matematikai észjárásnak étosza elvszerűbb, általános tételekhez inkább ragaszkodó, nem egykönnyen hajlékony: ez is külön értékes színt jelent a közgondolkodásban.

*

Mik a matematikai gondolkodásra való nevelés nehézségei? 1. A matematika folytonos és egyenletes figyelmet követel; a szigorú belső, logikailag zárt összefüggés vonalának kísérése hézagnélküli szellemi munkát kíván. Ha ez egyszer megszakad, vége az egész további gondolatmenetnek, nem úgy, mint a többi tárgynál, ahol a megszakítás ellenére a munkát folytatni lehet (pl. a történelmi tanulmányban). Ezért tipikus a matematikát tanuló ifjúnál a fölkiáltás: képtelen vagyok matematikát tanulni, nincsen tehetségem hozzá! Ezzel a tragikus önlemondással szemben erőt kell önteni az ifjú lélekbe: a matematika nem valami varázslatos boszorkányság! Csak józan ész kell hozzá s nem egészen különös tehetség, legalább is iskolai fokon; bárkinek hozzáférhető ismeretkör, csak világos fogalmakat s odaadó elmerülést követel! 2. A második nehézség abból támad, hogy a matematikában nincsen materiális, hanem csak formális érdek. A számok, körök, háromszögek magukban semmit sem mondanak: a viszonyító gondolkodási aktusoknak sikeres, evidenciával járó tevékenységén fordul meg minden. Már pedig a gyermek s az ifjú elméje tipikusan szemléletes, tárgyakhoz, képekhez kötött gondolkodású s legtöbbször az absztrakciótól idegenkedik. De éppen abban rejlik a matematikai oktatás igazi nevelő hatása, hogy a konkrét, szemléletes elmejárású fiatal lelkeket fokozatosan ráneveli az absztrakcióra s az evvel járó logikai gyönyörre. Ez a matematikai érzéknek, vagyis a szellem azon struktúrájának fejlesztése, amely a dolgok quantitatív oldalának megragadására, a bonyolult szám- és térviszonyoknak a közvetlen belső szemléletben való felfogására és rendezésére képesít. Ennek fejlesztése a matematikai oktatás nevelő művészete.

S ennek a kellő sorrendű középiskolai matematikai elemek igen alkalmas anyagul szolgálnak. Az nem véletlen, hogy századok óta mit tanítunk az európai középiskolákban a matematikából. «Az iskolai matematika épülete — mondotta Klein Felix — olyan, mint az aacheni székesegyház: a legkülönfélébb stílusfajokat egyesíti magában, amelyek történetileg hozzáragasztódtak». A tanulókkal a matematika stílusának történetét is meg lehet értetni és éreztetni. Iparkodjunk minél több történeti elemmel a matematikai oktatást szemléletessé és érdekessé tenni, a tárgyi anyagba a *humanum*ot, a nagy matematikusok elmefeszítésének pszichológiai rajzát beleszőni. Pythagoras, Eukleides, Archimedes, Diophantos, Descartes, Leibniz, Gauss, a Bolyaiak, Poincaré stb. alakjának itt-ott a tanításba való alkalomszerű belerajzolása, életük és gondolkodásmódjuk népszerű jellemzése számos tanulóban nagy érdeket kelt, elmegerjesztő s ezzel nevelő hatású. Így a matematikának s az érzületfejlesztő történelemnek nevelő ereje szépen egyesíthető.

Kornis Gyula.

LA VALEUR ÉDUCATIVE DES MATHÉMATIQUES.

Discours, prononcé le 23 juin 1942, inaugurant les cours de perfectionnement des professeurs de mathématiques des lycées, cours organisés par l'Institut pour la formation des professeurs d'enseignement secondaire à Budapest.

Jules Kornis.

AZ EGYENLŐOLDALÚ HÁROMSZÖGRÁCS, MINT SZÉLSŐÉRTÉKFELADATOK MEGOLDÁSA.

1. §.

Tekintsünk a közönséges euklidesi síkban egy elég nagy[1] négyzetet[2] és helyezzünk beléje egyenlősugarú körlapokat úgy, hogy egy körlapnak se legyen közös része valamelyik másikkal.[3] Felmerül itt a kérdés: miképpen kell a körlapokat elhelyezni, hogy a lehető legtöbb körlap férjen a négyzetbe? Ez a «legsűrűbb síkbeli körelhelyezkedés» problémája.[4] A körlapok középpontjai az extremális elrendeződésben — miként ismeretes — egyenlőoldalú háromszögrácsot alkotnak.[5]

Az alábbiakban egy másik — az előbbivel némi kapcsolatban álló — feladattal szeretnénk foglalkozni: *hogyan kell egy elég nagy négyzetet a lehető legkevesebb egyenlő sugarú körlappal lefedni?* Ennek a problémának várható megoldása az a körelhelyezkedés, amelyet a legsűrűbb körelhelyezkedésből a körlapok sugarainak $2\frac{\sqrt{3}}{3}:1$ arányban való megnövelésével nyerünk (l. az 1. ábrát). Ezt a sejtést azonban a maga általános-

---

[1] Alábbi állításunk arra a határesetre vonatkozik, midőn a négyzetet minden határon túl növeljük. Az «elég nagy» kifejezést az alábbiakban rövidség kedvéért mindig ilyen értelemben fogjuk használni.

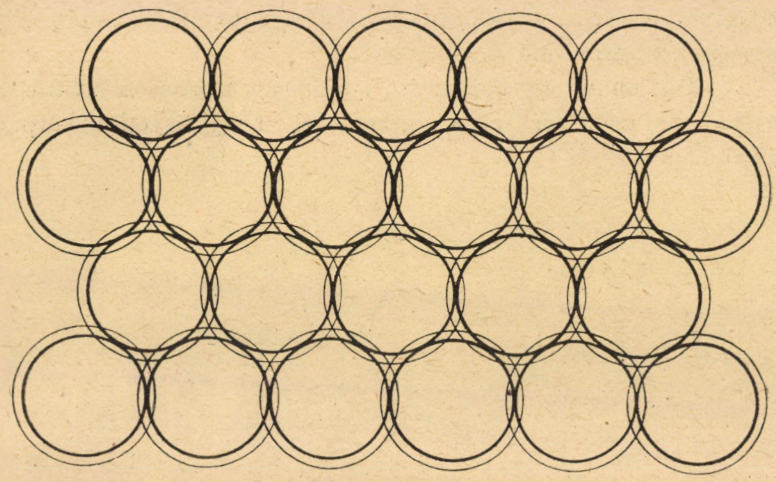
[2] Négyzet helyett tekinthetünk az alábbiakban valamilyen tetszésszerinti más adott alakú síkidomot is.

[3] Gondoljunk szemléletesség kedvéért egy sima asztallapra helyezett kétfilléresekre.

[4] V. ö. D. Hilbert—S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie (1932). 32. lap.

[5] Ennek egyszerű bizonyítását l. L. Fejes: Über einen geometrischen Satz. Math. Zeitschrift Bd. 46. (1940) 83—85.

ságában még nem sikerült bebizonyítanom. Az alábbiakban csak olyan körelhelyezkedéseket fogunk tekinteni, amelyekben a sík bármely résztartományát legfeljebb két körlap fedi.[6] Ilyen körelhelyezkedésekre a 2. §-ban problémánk megoldására két kü-



1. ábra.

lönböző bizonyítást fogunk adni. A 3. §-ban pedig egy újabb problémakörre szeretnék rámutatni, amelynek problémái fenti feladatunkkal szoros kapcsolatban vannak, illetőleg azzal ekvivalensek.

2. §.

Jelöljük a körlapokat rendre K_1, $K_2, \ldots, K_n$-nel és válasszuk ezek sugarát egyszerűség kedvéért egységnyinek. Problémánkat a következőképpen is fogalmazhatjuk: hogyan kell a körlapokat elhelyezni, hogy a lehető legnagyobb négyzetet fedjék, ha a körlapok n száma elég nagy?

Jelöljük két tetszésszerinti K_i és K_j körlap közös részét ennek területével egyetemben t_{ij}-vel. A síknak a körlapok által lefedett

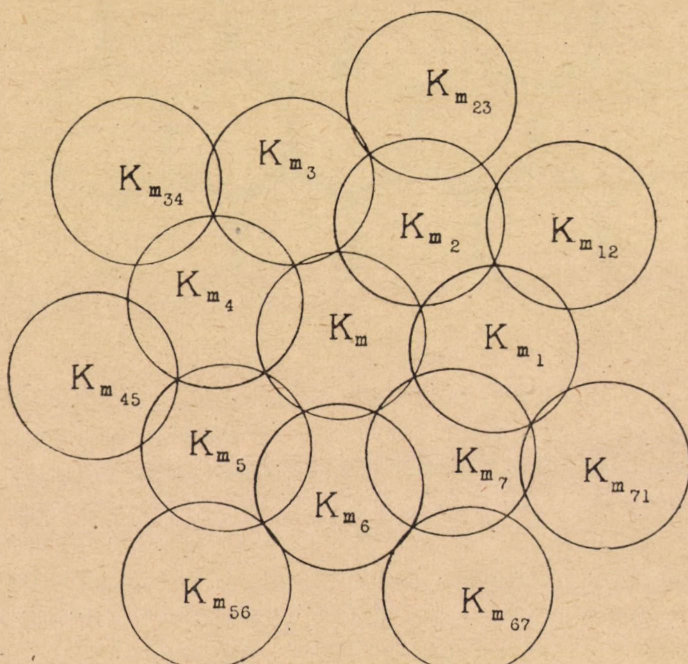
[6] Nagyon valószínű, hogy ez a feltétel magától teljesül és ezért annak kikötése fölösleges. Jegyezzük azonban meg, hogy problémánk megoldásához már ebben a különös esetben is sokkal finomabb meggondolásokra van szükség, mint például a legsűrűbb körelhelyezkedés problémájában.

részét ennek területével együtt jelöljük T-vel. A körelhelyezkedésre tett kikötésünk figyelembe vételével nyilván

$$T = \pi n - \Sigma t_{ij},$$

ahol az összegezés kiterjesztendő valamennyi másodrendű ij indexkombinációra. Feladatunk lényegében az itt szereplő Σt_{ij} összegnek alulról való megbecslése.

Tegyünk ehhez egy pillanatra a fenti megszorításon kívül egy további kikötést. Tételezzük ugyanis fel, hogy egyetlen körpár



2. ábra.

sem érinti egymást. Ekkor — nem számítva a köröknek T határán lévő metszéspontjait — a körök pontosan hármasával metszik egymást egy-egy pontban.

Ragadjunk ki egy tetszésszerinti K_m körlapot és tekintsük egyúttal ciklikus sorrendben azokat a $K_{m_1}, K_{m_2}, \ldots, K_{m_\nu}$ körlapokat, amelyek K_m-hez kapcsolódnak.[7] Tegyük fel, hogy sem K_m-nek, sem a hozzá kapcsolódó ν körnek nincs közös része T határával. Akkor további ν számú olyan kör van, amelyek a $K_{m_1}, K_{m_2}, \ldots, K_{m_\nu}$ körök közül egyszerre kettőhöz kapcsolódnak. Jelöljük ezeket rendre $K_{m_{12}}, K_{m_{23}}, \ldots, K_{m_{\nu 1}}$-gyel (l. a 2. ábrát). Tekintsük most a következő összeget:

$$\Sigma^{(m)}t_{ij} = (t_{mm_1}+t_{mm_2}+\cdots+t_{mm_\nu}) + (t_{m_1m_2}+t_{m_2m_3}+\cdots+t_{m_\nu m_1}) +$$
$$+ (t_{m_1m_{12}}+t_{m_2m_{12}}+t_{m_2m_{23}}+t_{m_3m_{23}}+\cdots+t_{m_\nu m_{\nu 1}}+t_{m_1m_{\nu 1}}).$$

Képezzük ezek összegét m minden értékére. Könnyen belátható, hogy ekkor a Σt_{ij} összeg aszimptotikus értékének épp a 8-szorosát nyerjük, mert leszámítva a T határához «közel fekvő» t_{ij}-ket minden egyes t_{ij} pontosan 8 különböző $\Sigma^{(m)}t_{ij}$-ben fog szerepelni. Ábránkon könnyen követhető például, hogy t_{mm_2} pontosan a 8 következő indexű $\Sigma^{(m)}t_{ij}$-ben fordul elő: a m, m_2, m_1, m_3, m_{12}, m_{23}, m_4 és m_7 indexűben. Ezért

$$\sum_{m=1}^{n} \sum^{(m)} t_{ij} \sim 8 \sum t_{ij}.$$

Ezt az összefüggést szem előtt tartva, elég a Σt_{ij} összeg helyett csak a $\Sigma^{(m)}t_{ij}$ részösszeget megbecsülni. Ez azonban már lényegesen egyszerűbb feladat. Jelöljük a_{ij}-vel a t_{ij}-t határoló két körív ívhosszát, akkor

$$t_{ij} = a_{ij} - \sin a_{ij},$$

s ennélfogva

$$\Sigma^{(m)}t_{ij} = (a_{mm_1} + \cdots + a_{mm_\nu}) - (\sin a_{mm_1} + \cdots + \sin a_{mm_\nu}) +$$
$$+ (a_{m_1m_2} + \cdots + a_{m_\nu m_1}) - (\sin a_{m_1m_2} + \cdots + \sin a_{m_\nu m_1}) +$$
$$+ (a_{m_1m_{12}} + \cdots + a_{m_1m_{\nu 1}}) - (\sin a_{m_1m_{12}} + \cdots + \sin a_{m_1m_{\nu 1}}).$$

Könnyen belátható azonban, hogy a zárójelben levő szögek összege rendre 2π, $(\nu-4)\pi$ és 4π. Mivel továbbá az itt szereplő sinusok argumentumai valamennyien π-nél kisebb pozitív szögek és $\sin x$ a $(0, \pi)$ számközben x-nek alulról konkáv függvénye, alkalmazhatjuk a JENSEN-féle egyenlőtlenséget, amely szerint

[7] Azon, hogy két körlap kapcsolódik itt egyszerűen azt értjük, hogy közös részük van. Ezt a terminológiát a későbbiekre való tekintettel használjuk.

alulról konkáv függvény különböző abszcisszákhoz tartozó értékeinek számtani közepe nem nagyobb az abszcisszák számtani közepén vett függvényértéknél. Ezért

$$\Sigma^{(m)}t_{ij} \geq 2\pi - \nu \sin\frac{2\pi}{\nu} + (\nu-4)\pi - \nu \sin\frac{(\nu-4)\pi}{\nu} +$$
$$+ 4\pi - 2\nu \sin\frac{4\pi}{2\nu} = (\nu+2)\pi - \nu\left(\sin\frac{4\pi}{\nu} + 3\sin\frac{2\pi}{\nu}\right).$$

Foglaljuk össze a jobboldali kifejezés számértékét $4 \leq \nu \leq 7$-re:[8]

ν	$(\nu+2)\pi - \nu\left(\sin\frac{4\pi}{\nu} + 3\sin\frac{2\pi}{\nu}\right)$
4	6·9
5	4·7
6	4·3
7	5·0

Gondoljuk továbbá meg, hogy $\sin\frac{4\pi}{\nu} + 3\sin\frac{2\pi}{\nu}$ értéke $\nu > 8$-ra monotón fogy; $\nu = 8$-ra pedig az értéke $1 + 3\frac{\sqrt{2}}{2} = 3{\cdot}12$, tehát π-nél kisebb. Ezért $\nu \geq 8$-ra

$$(\nu+2)\pi - \nu\left(\sin\frac{4\pi}{\nu} + 3\sin\frac{2\pi}{\nu}\right) \geq 2\pi + \nu\left(\pi - 1 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 2\pi.$$

Mindebből látható, hogy a $\Sigma^{(m)}t_{ij}$-re vonatkozó fenti egyenlőtlenségünk jobboldala ν tekintetbe jövő értékei közül $\nu = 6$-ra lesz minimális. Ennélfogva

$$\Sigma^{(m)}t_{ij} \geq 8\left(\pi - 3\sin\frac{\pi}{3}\right) = 8\pi - 12\sqrt{3}.$$

Ez az egyenlőtlenség természetesen nem érvényes az olyan m indexű körlapokra, amelyeknek T határával közös részük van, vagy amelyek ilyen körlaphoz kapcsolódnak. Ezek száma azonban n mellett elhanyagolható. Ezért mondhatjuk, hogy a legkedvezőbb esetben

---

[8] A $\nu = 3$ esetet kizárhatjuk, mert ebben háromszoros fedés lép föl.

$$\sum t_{ij} \sim \frac{1}{8} \sum_{m=1}^{n} \sum^{(m)} t_{ij} \sim \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) n.$$

Innen pedig

$$T = \pi n - \Sigma t_{ij} \sim \frac{3\sqrt{3}}{2} n.$$

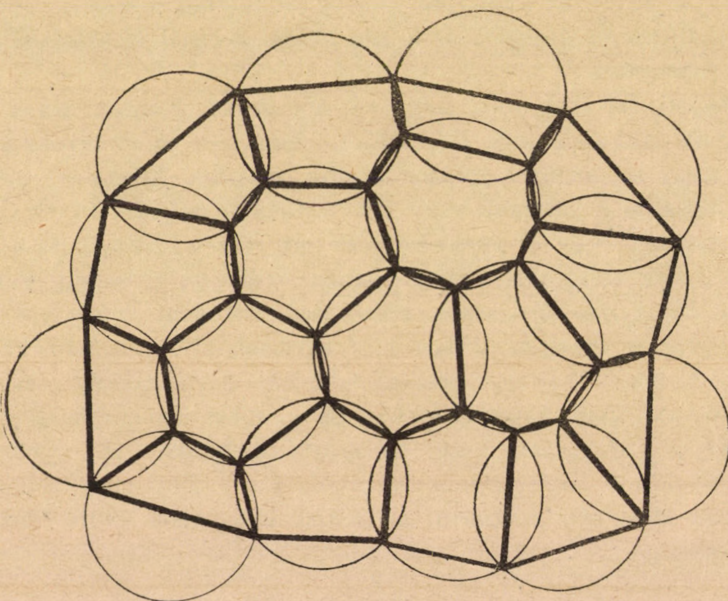
Ez azt jelenti, hogy az n egységsugarú körlappal lefedhető adott alakú síkidom területének aszimptotikus értéke legfeljebb az egységkörbe írt szabályos hatszög területének n-szerese lehet. Ezzel állításunk az egymást érintő körök esetének kizárásával be van bizonyítva.

Tegyük fel ezek után, hogy két kör érinti egymást. Ha a P érintési pont nem esik T határára, akkor P-n egyúttal még két kör megy át, amelyek szintén érintik egymást. Ellenkező esetben ugyanis a körlapok vagy nem fednék le teljesen P-nek egy környezetét, vagy P környezetének egy részét három körlap is fedné. Ezt az utóbbi esetet azonban kizártuk. Válasszuk most ki a két érintkező körpár közül tetszés szerint az egyiket és tekintsük a kiválasztott két kört egymáshoz kapcsolódó körnek. A másik két kört viszont tekintsük megállapodás szerint egymáshoz nem kapcsolódónak. Ez a megállapodás megfelel annak a felfogásnak, hogy az érintkező köröket az egymást metsző körök határesetének tekintjük. Ezzel fenti meggondolásainkat most már szószerint átvihetjük az egymást érintő körök esetére is.

*

A bevezetésben említett második bizonyítás a Σt_{ij} összegnek egy más úton való becslésén alapszik. Ez a bizonyítás talán egyszerűbb az előzőnél, bár ennek fejében fel kell használnunk az Euler-féle poliédertétel egyik korolláriumát. Az egymást érintő körök esetét ismét határesetként értelmezhetjük és ezért az általánosság megszorítása nélkül kizárhatjuk.

Tekintsük azokat a harmadrendű $\overline{ijk}$ indexkombinációkat, amelyekre a $K_{\bar{i}}$-t, $K_{\bar{j}}$-t és $K_{\bar{k}}$-t határoló körök egy pontban metszik egymást. Határozzuk meg mindenekelőtt ezek $\Sigma(\overline{ijk})$ számának aszimptotikus értékét. Kössük össze evégből a t_{ij} körívkétszög két szögpontját valamennyi t_{ij}-ben. Az így nyert vonalrendszert jelöljük V-vel. Kössük továbbá rendre össze a T határát alkotó köríveknek végpontjait is. Ezáltal egy T-be írt S sokszöget nyerünk. A $V+S$ vonalrendszert felfoghatjuk mint egy elfajult 0-nemű U poliéder élrendszerét. Ennek az U poliédernek az S által határolt síkrész egyik lapja és a többi n lapja is mind S síkjába esik (l. a 3. ábrát). Közvetlenül látható, hogy az U poliéder c_n csúcspontszámának aszimptotikus értéke



3. ábra.

éppen a keresett $\Sigma(\bar{i}\bar{j}\bar{k})$ összeg: $c_n \sim \Sigma(\bar{i}\bar{j}\bar{k})$; U lapjainak száma pedig $l_n = n+1$.

Gondoljuk meg már most, hogy U minden csúcspontjában három él fut össze. Ilyen soklapokra az Euler-féle poliédertételnek egy közvetlen folyománya szerint $c_n = 2l_n - 4$. Ennélfogva

$$\Sigma(\overline{ijk}) \sim 2n.$$

Ezt tudva, a bizonyítás többi része már semmi nehézséget sem fog okozni. Az előbbi bizonyítás jelöléseit megtartva először is

$t_{\overline{ij}}+t_{\overline{jk}}+t_{\overline{ki}}=a_{\overline{ij}}+a_{\overline{jk}}+a_{\overline{ki}}-(\sin a_{\overline{ij}}+\sin a_{\overline{jk}}+\sin a_{\overline{ki}})$. Meggondolva, hogy az itt szereplő szögek összege π és ismét alkalmazva a JENSEN-féle egyenlőtlenséget:

$$t_{\overline{ij}}+t_{\overline{jk}}+t_{\overline{ki}}\geq\pi-3\sin\frac{\pi}{3}\cdot$$

Összegezzük ezeket az egyenlőtlenségeket valamennyi $\overline{ijk}$ indexkombinációra. Akkor a baloldalon — nem számítva a T határához kapcsolódó t_{ij}-ket — minden t_{ij} kétszer fog előfordulni. Ezért

$$\Sigma(t_{\overline{ij}}+t_{\overline{jk}}+t_{\overline{ki}})\sim 2\Sigma t_{ij}.$$

Mivel pedig az $\overline{ijk}$ indexkombinációk számának aszimptotikus értéke $2n$, azért a legkedvezőbb esetben

$$\Sigma t_{ij}\sim\frac{1}{2}\Sigma(t_{\overline{ij}}+t_{\overline{jk}}+t_{\overline{ki}})\sim\frac{1}{2}\left(\pi-3\sin\frac{\pi}{3}\right)2n=\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)n.$$

Ezzel ismét eljutottunk a keresett becsléshez.

Most még rá szeretnék mutatni egy lehetőségre, amelynek segítségével az imént adott bizonyítás valószínűleg kiterjeszthető az általános esetre. A fenti $T=\pi n-\Sigma t_{ij}$ egyenlőség helyébe az általános esetben a következő lép:

$$T=\pi n-\Sigma t_{ij}+\Sigma t_{ijk}-+\cdots+(-1)^{n+1}t_{12\ldots n}$$

ahol $t_{ij\ldots l}$ jelenti a $K_i, K_j,\ldots, K_l$ körlapok közös részének területét és az összegezések rendre kiterjesztendők valamennyi másod-, harmad-,... rendű kombinációra.[9] Most tehát a

$$\Sigma t_{ij}-\Sigma t_{ijk}+-\cdots+(-1)^n t_{12\ldots n},$$

összeget kell megbecsülnünk! Végezzük ehhez a következő szerkesztést. Ragadjunk ki egy tetszésszerinti K_i kört és kössük össze ennek O_i középpontját az összes többi kör középpontjával. Rajzoljuk meg a kapott $n-1$ szakasz felező merőlegesét és tekintsük az ezek által meghatározott félsíkok közül azt, amelyik O_i-t tartalmazza. Ezeknek a félsíkoknak közös része egy O_i-t

---

[9] A $T=\sum\limits_{\mu=1}^{n}(-1)^{\mu+1}\sum\limits_{i_r\neq i_s}t_{i_1i_2\ldots i_\mu}$ egyenlőség könnyen igazolható teljes indukcióval tetszésszerinti $t_1, t_2,\ldots, t_n$ tartományokra is.

tartalmazó (projektív) s_i sokszög. Az ilyen módon szerkesztett n sokszög a síkot hézag nélkül kitölti.

Tekintsük az s_i sokszögek oldalai által alkotott vonalrendszer csúcspontjait. E csúcspontokban általában 3 él fut össze, mert 3-nál több élű csúcspont csak akkor léphet fel, ha az $O_1, O_2, \ldots, O_n$ pontok közül 3-nál több fekszik egy körön. Az ilyen kivételes csúcspontok mindenesetre megszüntethetők az $\{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ pontrendszernek egy alkalmas infinitézimális elmozgatásával. Ilyen értelemben egy olyan csúcspont, amelybe $3+s$ él torkol s számú összeeső 3-élű csúcspontként fogható fel.

Tételezzük ezek alapján fel, hogy vonalrendszerünknek csak 3-élű csúcspontjai vannak és tekintsük az összes általuk meghatározott $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ indexhármast. Ezek számának aszimptotikus értéke — miként fentebb láttuk — $\Sigma(\bar{i}\bar{j}\bar{k}) \sim 2n$. Már most abból, hogy a körök az előre megadott síkidomot lefedik, következik, hogy az $\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ indexhármashoz tartozó csúcspont föltétlenül hozzá tartozik a $K_{\bar{i}}$, $K_{\bar{j}}$ és $K_{\bar{k}}$ körlapok mindegyikéhez. Ámde azon kikötés mellett, hogy a $K_{\bar{i}}$, $K_{\bar{j}}$ és $K_{\bar{k}}$ köröknek legalább egy közös pontjuk van, a $(t_{\bar{i}\bar{j}}+t_{\bar{k}\bar{j}}+t_{\bar{k}\bar{i}}) - 2t_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}$ különbség csak akkor lehet minimális, ha $t_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} = 0$. Ezt figyelembe véve

$$t_{\bar{i}\bar{j}} + t_{\bar{j}\bar{k}} + t_{\bar{k}\bar{i}} - 2t_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}} \geq \pi - 3 \sin \frac{\pi}{3}.$$

Tekintsünk most olyan körelhelyezkedéseket, amelyekre

$$\Sigma t_{ij} - \Sigma t_{ijk} + - \cdots + (-1)^n t_{12\ldots n} \geq \frac{1}{2} \Sigma (t_{\bar{i}\bar{j}} + t_{\bar{j}\bar{k}} + t_{\bar{k}\bar{i}} - 2t_{\bar{i}\bar{j}\bar{k}}).$$

A fentiek alapján az 1. §-ban kimondott sejtés be van bizonyítva mindazokra a körelhelyezkedésekre, amelyekre ez az egyenlőtlenség teljesül. Azonnal látható, hogy ilyen körelhelyezkedés például az, amelyben a sík bármely résztartományát legfeljebb 3 körlap fedi és valamennyi háromszorosan fedett síkrész körívháromszög. Valószínű azonban, hogy egyenlőtlenségünk igaz bármily körelhelyezkedésre.

3. §.

Most rá szeretnék mutatni egy látszólag távol eső problémára, amelyről azonban hamarosan látni fogjuk, hogy az a bevezetésben felvetett problémával ekvivalens.

Mindenekelőtt emlékeztetünk két konvex G és H testnek egy az irodalomban használatos eltérésdefiníciójára. Tekintsük azt a lehető legkisebb pozitív $d(G, H)$ számot, amely azzal a tulajdonsággal bír, hogy G bármely pontjának $d(G, H)$ sugarú környezetében van H-nak pontja és fordítva H bármely pontjának $d(G, H)$ sugarú környezetében van G-nek legalább egy pontja. Ezt a $d(G, H)$ számot G és H eltérésének nevezzük.[10]

Tekintsünk most egy megadott G gömböt és jelöljük $\overline{P}_n$-sal azt az n-lapot, amelynek G-től való eltérése a lehető legkisebb az összes n lapszámú poliéder közül. Az említett feladat $d(\overline{P}_n, G)$ aszimptotikus értékének meghatározása.

Jegyezzük meg először is, hogy a tetszésszerinti n-lapokon kívül a G-be beírt és a G körül írt n-lapok közül is kereshetjük a minimális eltérésű $\overline{P}_n^b$, illetőleg $\overline{P}_n^k$ poliédert. Könnyen belátható azonban, hogy

$$d(\overline{P}_n^b, G) \sim d(\overline{P}_n^k, G) \sim 2d(\overline{P}_n, G).$$

Ezért elég például csupán körülírt poliédereket tekintenünk.

Legyen P_n^k egy tetszésszerinti G körül írt n-lap. Ennek a G-től legtávolabb fekvő csúcspontja (illetőleg ezek egyike) legyen C, az egyik C-be torkoló lapnak G-vel való érintési pontja pedig E. Rajzoljunk valamennyi lap síkjában az érintési pontok körül $\overline{CE}$ sugarú köröket, majd vetítsük ezeket G középpontjából G-re. A G-n kapott n egyenlő sugarú kör által határolt gömbsüveg nyilván lefedi G-t. Közvetlenül látható már most, hogy a $\overline{P}_n^k$ poliédert az jellemzi, hogy erre a szerkesztett gömbsüvegek a lehető legkisebbek. Ebből azonban valóban kitűnik feladatunk ekvivalenciája a bevezetésben felvetett problémával.

Ugyancsak figyelemre méltó az a probléma, amelyben nem az adott lapszámú, hanem az adott csúcspontszámú soklapok közül keressük a minimális eltérésűt. Ezt az előbbi feladat duálisának tekinthetjük és várható, hogy a két probléma megoldása között is szoros kapcsolat van.

Említsük meg végül, hogy egy egész sereg újabb problémát nyerünk, ha az előbb használt eltérésdefiníciót valamilyen más eltérésdefinícióval helyettesítjük. Ilyen általános eltérésdefiníciók

---

[10] L. például W. Blaschke: Kreis und Kugel (1916). 60. lap.

idézése helyett itt mindjárt csupán konkrét példákat említünk: hogyan helyezkednek el a G köré írt minimális térfogatú n-lap lapjainak érintési pontjai, ha n-net minden határon túl növeljük? Vagy pedig: hogyan helyezkednek el a G-be írt adott n csúcspontszámmal bíró maximális felszínű poliéder csúcspontjai? Várható, hogy az ilyenszerű feladatok az $n \to \infty$ határesetben mind az egyenlőoldalú háromszögrácshoz vezetnek.

Fejes László.

DAS GLEICHSEITIGE DREIECKSGITTER ALS LÖSUNG VON EXTREMALAUFGABEN.

Wir wenden uns folgender Extremalaufgabe zu: wie soll man eine hinreichend grosse Anzahl von gleichgrossen Kreisscheiben in der gewöhnlichen Euklidischen Ebene anordnen, damit sie die möglichst grösste ebene Figur vorgegebener Gestalt überdecken? Wir betrachten nur den Sonderfall derjenigen Kreislagerungen, bei denen höchstens zwei Kreisscheiben sich teilweise überdecken und zeigen (auf zwei verschiedene Arten), dass die Kreismittelpunkte in der extremalen Anordnung einem gleichseitigen Dreiecksgitter angehören. Es werden noch einige Fragen aufgeworfen, die sich an die behandelte Aufgabe anknüpfen, bzw. mit ihr gleichwertig sind.

Ladislaus Fejes.

EGY ELEMI GEOMETRIAI SZÉLSŐÉRTÉKFELADAT.

Az utóbbi évek irodalmában gyakran találkozunk ú. n. fedési problémákkal. A számos idevágó feladat közül példaképpen csak egyet ragadunk ki: Meghatározandó az a lehető legkisebb körlemez, amellyel bármely D átmérőjű ponthalmaz lefedhető.[1] Az alábbiakban egy ilyenszerű, de teljesen elemi geometriai problémával szeretnénk foglalkozni, amely elsősorban azért érdemel figyelmet, mert több meg nem oldott feladat kapcsolódik hozzá. E probléma a következő:

Meghatározandó három adott d_1, d_2, d_3 átmérőjű körlemezzel lefedhető körlemezek átmérőjének $\bar{d}$ maximuma.

Erre a feladatra FEJES LÁSZLÓ hívta fel a figyelmem. Ugyancsak ő közölte velem a valószínűnek látszó megoldást, amelyben külön kell választanunk két esetet:

a) Ha a d_1, d_2, d_3 átmérőkből, mint oldalakból hegyesszögű háromszög alkotható, akkor $\bar{d}$ egyenlő e háromszög köré írt kör átmérőjével.

b) Ha a d_1, d_2, d_3 átmérőkből nem alkotható hegyesszögű háromszög, akkor $\bar{d}$ megegyezik a d_1, d_2, d_3 átmérők legnagyobbikával.

Célunk elsősorban ennek bebizonyítása.

Tekintsük először azt az áttekinthetőbb feladatot, amelyben az adott k_1, k_2, k_3 körlemezekkel lefedhető maximális körlemez helyett a maximális körvonalat keressük. Látni fogjuk, hogy e két feladat megoldása közös.

Tekintsük a k_1, k_2, k_3 körlemezeknek azt a helyzetét, amelyben

[1] JUNG, H. W. E.: Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. J. reine angew. Math. Bd. 123 (1901), S. 241—257, v. Sz. NAGY, GY. (J.): Über einen Satz von H. Jung. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 24. (1915), S. 390—392.

a lehető legnagyobb $\overline{k}$ körvonalat fedik le és tegyük fel, hogy ennek átmérője $\overline{d} > \max (d_1, d_2, d_3)$. A k_1, k_2, k_3 körök ekkor páronként $\overline{k}$-nak egy-egy pontjában metszik egymást. Ellenkező esetben ugyanis vagy nem fedhetnék le teljesen $\overline{k}$-t, vagy pedig $\overline{k}$-nak valamely részívét két körlemez is fedné. Ez utóbbi esetben azonban $\overline{k}$ átmérője nyilván növelhető lenne.

Ennél azonban még többet állíthatunk. Jelöljük k_1 és k_2-nek, k_2 és k_3-nak, k_3 és k_1-nek $\overline{k}$-n lévő metszéspontjait rendre P_3, P_1, P_2-vel; akkor $P_1P_2 = d_3$, $P_2P_3 = d_1$, $P_3P_1 = d_2$. Ellenkező esetben ugyanis k átmérője ismét növelhető lenne. A $\overline{d} > \max (d_1, d_2, d_3)$ feltevésünkből következik továbbá, hogy a k_1, k_2, k_3 körlemezek mindegyike $\overline{k}$-nak csak félkörnél kisebb részívét fedheti. Nyilvánvaló tehát, hogy a $P_1P_2P_3$ Δ-nek hegyesszögűnek kell lenni. Ahhoz tehát, hogy a k_1, k_2, k_3 körlemezekkel egy $\overline{d} > \max (d_1, d_2, d_3)$ átmérőjű körvonalat lehessen lefedni szükséges, hogy a d_1, d_2, d_3 oldalakból hegyesszögű háromszög legyen alkotható. Ezzel a *b)* alatti állítás be van bizonyítva.

Az *a)* alatti állítás belátásához csak azt kell még kimutatnunk, hogy az előbb vizsgált esetben a k_1, k_2, k_3 körlemezek együttesen nem csak a $\overline{k}$ körvonalat fedik le, hanem az általa határolt körlemezt is. Ez azonban triviális.

Tekintsük most azt az általánosabb esetet, midőn négy körlemez van adva. Kimondhatjuk a következő tételt:

Legyen adva négy k_1, k_2, k_3, k_4 kör, amelyek átmérője rendre d_1, d_2, d_3, d_4. Ha ezekből, mint oldalakból, oly húrnégyszög alkotható, amely tartalmazza a köréje írt $\overline{k}$ kör középpontját, akkor a k_1, k_2, k_3, k_4 körlemezekkel lefedhető maximális körlemez $\overline{d}$ átmérője megegyezik $\overline{k}$ átmérőjével. Ellenkező esetben

$$\overline{d} = \max (d_1, d_2, d_3, d_4).$$

Ennek belátásához elég az előzőek figyelembevételével csupán azt kimutatnunk, hogy a tételünkben jelzett esetben a k_1, k_2, k_3, k_4 körlemezek együttesen nemcsak a $\overline{k}$ körvonalat fedik le, hanem egyszersmind az általa határolt körlemezt is. Ámde a húrnégyszög bármely oldala által meghatározott körszeletet a megfelelő körlemez biztosan lefedi. Ezért csak a húrnégyszög belsejét kell vizsgálnunk.

Könnyen belátható azonban általánosabban, hogy négy körlemez, amelyek átmérői egy négyszög oldalai, ezt a négyszöget együttesen lefedik. Bontsuk fel ennek belátásához az $ABCD$ négyszöget az AC átlóval két háromszögre. Azonnal látható, hogy pl. az AB és BC átmérőjű körlemezek lefedik az ABC $\triangle$-et. E körök ugyanis az ABC $\triangle$-nek AC oldalához tartozó magasságának E talppontjában metszik egymást. Az AB fölé emelt félkör tehát tartalmazza az ABE $\triangle$-et, a BC fölé emelt félkör pedig a BCE $\triangle$-et, amivel állításunk be van bizonyítva.

Az előbbihez hasonló egyszerű tétel mondható ki az n számú körlemezzel lefedhető maximális körvonalra is. De teljesen más a megoldása — már az $n = 5$ esetre is — a maximális körlemezre vonatkozó feladatnak. Ez már abból az egyszerű tényből is kitűnik, hogy pl. a szabályos ötszög oldalai fölé emelt félkörök nem fedik le az ötszöget. A körlemezre vonatkozó probléma általános megoldása már az $n = 5$ esetre sem ismeretes.

Egy további feladat volna $\overline{d}$ asszimptotikus megbecslése nagy n esetére, ha ismerjük a körlemezek átmérőjének «eloszlásfüggvényét». E feladat megoldása azonban már abban a legegyszerűbb esetben sem könnyű, amikor a körlemezek egyenlő átmérőjűek.[1]

*

A fentiekkel analóg problémákat vethetünk fel a térben is. Itt csak arra az esetre szorítkozunk, amikor négy egyenlő átmérőjű gömb van adva. Bebizonyítjuk a következő tételt:

Négy egyenlő d átmérőjű g_1, g_2, g_3, g_4 gömb egyesített halmazába írt bármely gömb D átmérője:

$$D \leq \frac{5}{4}\sqrt{\frac{13}{11}} \cdot d.$$

Az $=$ jele akkor és csak akkor állhat, ha a g_1, g_2, g_3, g_4 gömbök

---

2 Ezt a problémát illetőleg l. Fejes László: Az egyenlőoldalú háromszögrács, mint szélsőértékfeladatok megoldása. Mat. és Fiz. Lapok. XLIX, (1942) 238—248.

úgy helyezkednek el, hogy egy szabályos tetraéder minden egyes lapja egy-egy gömb főkörébe legyen beírva.

Tekintsük ennek belátása végett az egyenlő d átmérőjű g_1, g_2, g_3, g_4 gömböknek azt a helyzetét, amelyben a lehető legnagyobb átmérőjű G gömbfelületet fedik le. Ez esetben a g_1, g_2, g_3, g_4 gömböknek G-vel való négy metszésvonala közül bármelyik három egy-egy pontban metszi egymást. Ellenkező esetben ugyanis a négy gömb vagy nem fedné le teljesen G-t, vagy G-nek egy részfelületét mind a négy gömb fedné. Ez utóbbi esetben azonban G növelhető lenne.

Jelöljük a fentiekhez hasonlóan a szóbanforgó három-három kör négy metszéspontját a negyedik gömb indexével rendre P_1, P_2, P_3, P_4-gyel. A keresett extremális helyzetben a $P_1P_2P_3P_4$ tetraédernek mind a négy lapja a g_1, g_2, g_3, g_4 gömbök egyikének egy-egy főkörébe van beírva. Így pl. a $P_1P_2P_3$ a g_4 gömbnek egy főkörébe. És most használjuk ki azt a feltételt, hogy az adott négy gömb egyenlő átmérőjű. E feltételből ugyanis KLUG LIPÓTnak egy szép elemi geometriai tétele[3] értelmében következik, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ tetraéder lapjai egybevágóak. Ennélfogva G felszíne egyenlő pl. a $P_1P_2P_3$ gömbháromszög négyszeres területével. Ámde egy adott gömbi körbe írt gömbháromszögek közül — amint az a LEXELL-féle tétel[4] felhasználásával könnyen belátható — az egyenlőoldalú gömbháromszögnek van a legnagyobb területe. Ebből viszont azonnal következik, hogy a g_1, g_2, g_3, g_4 gömbök akkor fedik le a lehető legnagyobb gömbfelületet, amikor a $P_1P_2P_3P_4$ tetraéder szabályos. Ebben az esetben azonban az adott négy gömb egyesített halmaza a G gömbfelülettel egyidejűleg ennek belsejét is tartalmazza, amivel állításunk be van bizonyítva.

---

[3] A tétel szószerinti idézésben a következőképpen szól: Az oly tetraéder, amely két koncentrikus gömb egyikébe beírható, a másik körülírható — egyenoldalú. KLUG LIPÓT: Az egyenoldalú tetraéder. Mathematikai és Physikai Lapok XXVII. 52. lap.

[4] Tekintsünk egy ABC gömbháromszöget, amelynek AB oldalát rögzítsük, a C csúcspontot pedig mozgassuk úgy, hogy ABC területe ne változzék. E feltételt kielégítő C pontok geometriai helye egy az A és B pontokkal diametrálisan szembenfekvő A' és B' pontokon, valamint az eredeti C ponton átmenő kör.

Valamint a síkban, úgy a térben is felmerül a kérdés: miként lehet valamiképpen adott nagyszámú gömb egyesített halmazába írható gömbök átmérőjének felső határát asszimptotikusan megbecsülni. Megjegyzendő, hogy e probléma síkbeli analogonjától eltérően, a térben még a gömbfelületre vonatkozó probléma megoldása sem ismeretes, hiszen az — amint könnyen belátható — a fentebb említett körlapra vonatkozó problémával aequivalens.

Molnár József.

ÜBER EINE ELEMENTARGEOMETRISCHE EXTREMALAUFGABE.

Es wird das Maximum des Durchmessers derjenigen Kreisscheiben bestimmt, die durch drei vorgegebene Kreisscheiben bedeckt werden können. Im Raum wird das analoge Problem nur in dem Sonderfall gleichgrosser Kugeln behandelt.

Josef Molnár.

LÖVEDÉKEK ELLENÁLLÁSÁNAK HIDRODINAMIKAI MEGKÖZELÍTŐ MEGHATÁROZÁSÁRÓL.

Prof. Dr. Ernst Jacobsthal 60. születésnapjára.

Annak a hidrodinamikai kérdéscsoportnak lineáris megközelítéssel való tárgyalása, amelyben a folyadék átlagos sebessége a hangsebességnél lényegesen nagyobb, elsősorban KÁRMÁN TÓDOR munkásságának köszönhető.[1] A lövedékellenállás elméleti vizsgálata e problémakörnek egy tipikus példája.

A lineárizáció a folyadék nagy alapsebességéhez viszonyítva kicsinynek feltételezett zavarósebességek szuperponálásával származtatja első megközelítésben a folyadék eredő sebességét. A lövedék ellenállásának tárgyalásakor KÁRMÁN a megfelelő differenciálegyenleteket és ezek határfeltételeit kielégítő zavarósebességek analitikus alakját fizikai meggondolásokkal határozta meg. E miatt módszere csupán azoknak a problémáknak megoldására alkalmazható, amelyeknél a zavarósebességek[2] analitikus formája a probléma fizikai tartalmából könnyen felismerhető.

Ebben a dolgozatban a hangsebességnél nagyobb átlagos sebességek esetén fellépő felhajtó és ellenállási erők lineárizált meghatározását tárgyaljuk, mégpedig a lineárizált differenciálegyenletet és a nem folytonos határfeltételeket kielégítő elemi megoldások szisztematikus származtatásával ú. n. diszkontinuált

---

[1] Lásd pl. KÁRMÁN összefoglaló referátumát a «Le alte velozita in aviazione»-ban. Reale Accademia d'Italia. Roma, 1936. HSUE-SHEN TSIEN: Supersonic Flow Ower an Inclined Body of Revolution. Journal of the Aeronautical Sciences. Vol. 5. 1938.

[2] A következőkben e zavarósebességeket elemi megoldásoknak is nevezzük.

komplex integrálok segítségével. Az elemi megoldásoknak ezen szisztematikus származtatása folytán módszerünk megoldási körébe a technikailag oly fontos stacionárius és nemstacionárius, sík- vagy térbeli problémák is bekapcsolhatók.

A hangsebességnél nagyobb sebességű áramlásproblémák exakt megoldása szinte kivétel nélkül a síkbeli stacionárius esetre szorítkozik. A grafikus módszerek kivételével[3] az analitikus megoldás jelenleg használatos szinte valamennyi alapgondolata lényegében fellelhető MOLENBROEKnak igen tartalmas és hosszú ideig majdnem egészen elfeledett dolgozatában.[4] A térbeli stacionárius és a nemstacionárius áramlásokkal kapcsolatos kérdések tárgyalásában a jelenleg ismeretes exakt módszerek — igen kevés kivételtől eltekintve[5] — nem vezetnek célhoz.

E miatt annál kevésbbé tekinthető ez a dolgozat érdektelennek, mert módszere egy más problémakörre alkalmazva egyszerűen zárt elmélethez vezetett.[6] Ezen elmélet alapján nyert konkrét numerikus értékek meghatározásakor nem szabad azonban elfelejtenünk, hogy eredményeink, a lineárizáció miatt igen erős megszorításoknak vannak alávetve, s e miatt csakis határértékegyenletekként foghatók fel.

1. *Fizikai feltételek. A lineárizált ellenállási formula.* Legyen $r=\varrho(x)$ a forgásszimmetrikus lövedék meridiángörbéjének egyenlete. (1. ábra). E lövedéket tengelyszimmetrikus rááramlás feltételezésével, belehelyezzük egy surlódásmentesen, stacionáriusan és párhuzamosan áramló folyadékba. W_0 jelölje a folyadék végtelenben való áramlási sebességét.

A lövedéknek a párhuzamos áramlásra kifejtett hatását a

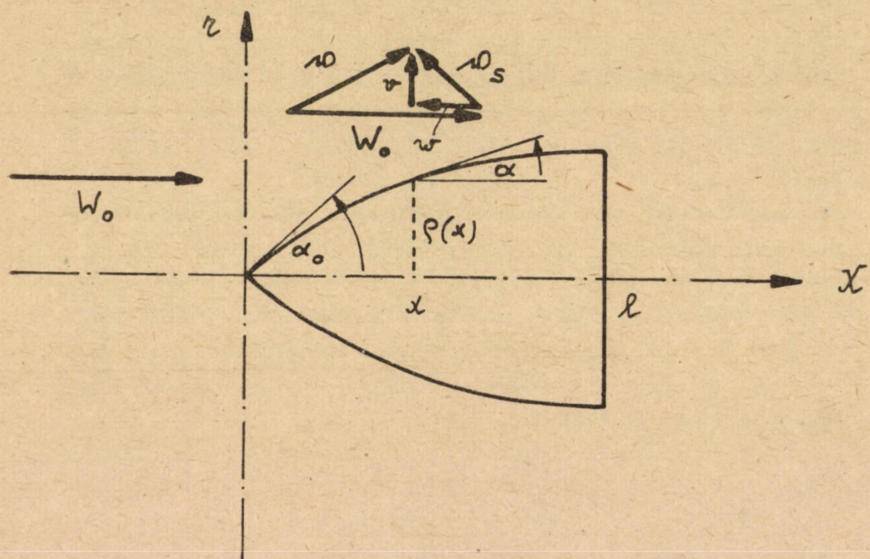
[3] Lásd pl. E. PREISWERK monográfiáját: Awendung gasdynamischer Methoden auf Wasserströmungen mit freier Oberfläche. Zürich, 1938. GEIGER—SCHEEL: Handbuch der Physik Bd. VII., WIEN—HARMS: Handbuch der Experimentalphysik Bd. IV. 1.

[4] MOLENBROEK: Über einige Bewegungen eines Gases bei Annahme eines Geschwindigkeitspotentials. Arch. d. Math. u. Phys. 1890.

[5] Pl. TO—KAMADA. Proceedings of Japan. Vol. 21.; BRAUN: Dissertation Göttingen 1932.

[6] v. BORBÉLY: Instationäre ebene Theorie der Luftkräfte von Tragflügeln, die mit Überschallgeschwindigkeit angestömt werden. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 22. 1942.

$\mathfrak{v}_s = \{v, -w\}$ zavarósebesség indukálásával lehet jellemezni. Ha ezt a zavarósebességet a párhuzamos áramlás sebességével szuperponáljuk, megkapjuk a folyadék $\mathfrak{v} = \{V = v, W = W_0 - w\}$ rezultáns áramlási sebességét. Ezt a rezultáns sebességet egyértelműen meghatározza az a tény, hogy egyrészt kielégíti a folyadék mozgásának általános mechanikai alapegyenleteit, másrészt megfelel az akadályként szolgáló test felszínét jellemző



1. ábra.

határfeltételeknek és a végtelenben a párhuzamos áramlás feltételének. Ezen hidrodinamikai határfeltételes probléma megoldása után a folyadékban, különösen az akadályozó test határfelületén fellépő nyomás a folyadék rezultáns sebességi mezejének ismeretéből kiszámítható. A nyomás kiszámítása után az akadályozó testre ható erők eredőjének meghatározása egyszerű integrációra vezethető vissza.

Mechanikai alapegyenleteink a következők:

1) a kontinuitás kinematikai feltétele

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) + \left(V\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + W\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) = 0.$$

és 2) az impulzus tétel dinamikai feltételei

$$\varepsilon\frac{\partial V}{\partial t}+\varepsilon\left(V\frac{\partial V}{\partial r}+W\frac{\partial V}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\varepsilon\frac{\partial W}{\partial t}+\varepsilon\left(V\frac{\partial W}{\partial r}+W\frac{\partial W}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x},$$

amelyben ε a folyadék sűrűségét, a p a folyadékban ható nyomást jelzi. E két változót a folyadék $\varepsilon=\varepsilon(p)$ állapotegyenlete kapcsolja össze. Tegyük $\frac{dp}{d\varepsilon}=c^2$, s a sűrűség kiküszöbölésével vezessük be az impulzus egyenleteket a kontinuitás egyenletébe. Ily módon, stacionárius áramlás esetében a

$$\frac{\partial W}{\partial x}\left(1-\frac{W^2}{c^2}\right)+\frac{\partial V}{\partial r}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)-\\-\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial r}\right)\frac{VW}{c^2}+\frac{V}{r}=0 \tag{1}$$

egyenletet nyerjük. Ebből az egyenletből nyilvánvaló, hogy c sebesség jellegével bír.

Tételezzük fel, hogy a folyadék áramlása forgásmentes, tehát

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial W}{\partial r}, \tag{2}$$

vagy másszóval létezik egy φ sebességi potenciál és egy ψ áramlási függvény, mellyel $W=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $V=\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, $\varepsilon Vr=\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $-\varepsilon Wr=\frac{\partial\psi}{\partial r}$. Ezekkel a feltételekkel az általános impulzusegyenletek integrálhatók, s integrációjuk a BERNOULLI-féle

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(V^2+W^2)+\int^{p}\frac{dp}{\varepsilon(p)}=C(t) \tag{3}$$

nyomásegyenletet szolgáltatja.

A kontinuitás egyenletével egyenértékű (1) egyenlet pedig stacionáriusan a következő alakot ölti

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(1-\frac{W^2}{c^2}\right)-2\frac{VW}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0. \tag{4}$$

E másodrendű differenciálegyenlet karakterisztikáit megadja a $c^2(dr^2+dx^2)=(Wdr-Vdx)^2$ egyenlet, amely az áramlási függvény segítségével $r\varepsilon c\,ds=\pm d\psi$ alakra hozható. A ψ áramlási függvény lokális változása a karakterisztikus görbék ds íveleme mentén $\frac{d\psi}{ds}=\sin\vartheta\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2}$.[7] Itt ϑ a karakterisztikus görbének az áramvonallal alkotott szögét jelenti. Ezek alapján könnyen belátható, hogy az áramfüggvény mezejében a karakterisztikus görbéket jellemző egyenlet $\frac{d\psi}{ds}=\pm\sin\vartheta\varepsilon r|\mathfrak{v}|$, amelyet $\sin\vartheta=\pm\frac{c}{|\mathfrak{v}|}$ alakban is írhatunk.

Ebből az egyenletből a (4) differenciálegyenlet karakterisztikáit és a c sebességet könnyen lehet fizikailag értelmezni. Tételezzük fel, hogy a P pont az eredetileg zavartalan áramlásnak egy lokális zavarási gócpontja (2. ábra). Ennek a gócpontnak zavaró hatását az áramlás dt idő alatt a $\overline{PQ}=\mathfrak{v}dt$ úton egyrészt magával ragadja, másrészt a zavarás terjedésének minden pillanatában, új meg új zavarási gócpontokat képez. Az ezekből kiinduló zavarósebességek önálló terjedési sebességét c-vel jelöljük. A 2. ábrából rögtön leolvasható, hogy a folyadékban önálló c sebességgel tovaterjedő zavarások burkoló görbéjének egyenlete a karakterisztikák fenti egyenletével azonos.

A folyadékban tovaterjedő zavarások önálló sebességét az illető folyadék hangsebességének nevezzük. Ennek nagysága $c=\sqrt{\frac{dp}{d\varepsilon}}$. Ha stacionárius és adiabatikus folyamatokat tételezünk fel, akkor $p=p_0\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{\varkappa}$ és a (3) egyenlet $\frac{1}{2}(V^2+W^2)-\frac{1}{2}(V_0^2+W_0^2)+\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\left(\frac{p}{\varepsilon}-\frac{p_0}{\varepsilon_0}\right)=0$ alakban írható fel. Tekintettel arra, hogy ez esetben a hangsebesség négyzete $c^2=\varkappa\frac{p}{\varepsilon}$, azért $c^2=c_0^2+\frac{\varkappa-1}{2}[(V_0^2+W_0^2)-(V^2+W^2)]$. A hangsebesség tehát a folyadék pillanatnyi áramlási sebességének függvénye.

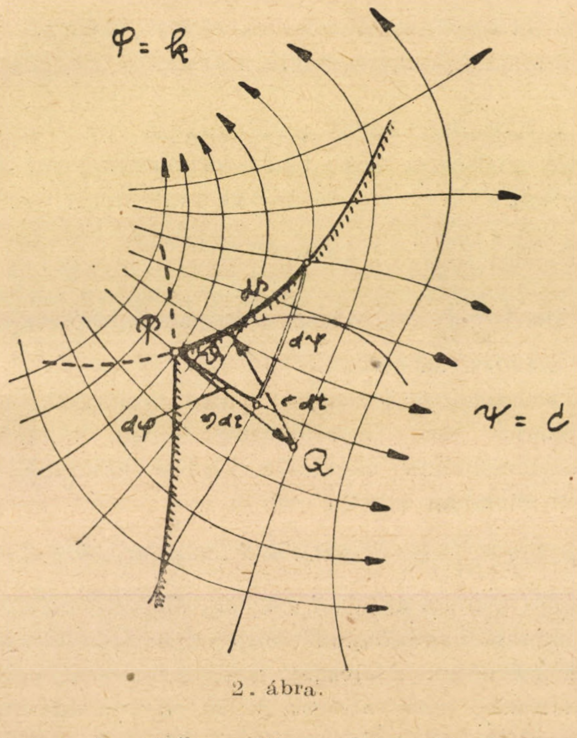
Ha a hangsebesség nagyobb az áramlás sebességénél, akkor

---

[7] G. Scheffers: Einführung in die Theorie der Kurven. Bd. 1. S. 125. 1921.

a (4) differenciálegyenlet karakterisztikái komplexek. E miatt a zavarás hatásának nincs reális burkoló görbéje, a zavarás hatása tehát a folyadék áramlásával szembe úszik és megfelelő idő alatt az áramiránnyal ellentétes tér bármely pontjához eljut. Az ilyen áramlásokat hangsebesség alatti áramlásoknak nevezzük.

Ha azonban az áramlás sebessége nagyobb mint a folyadék lokális hangsebessége, a zavarás hatásának vannak valós bur-



2. ábra.

kológörbéi és ezek a differenciálegyenlet reális karakterisztikái. Ezeket a karakterisztikákat Mach-féle görbéknek, s a ϑ szöget Mach-féle szögnek szokás nevezni. A P zavarási gócponton két különböző karakterisztikus görbe halad át. E két görbe által alkotott, s az áramlás irányába eső szögtér zavaró tere a P-ben lokalizált zavarási gócpontnak. Ebből a zavarótérből a zavarás hatása az áramlással ellentett irányban nem juthat túl a karakterisztikákon. A zavarás szögterén kívül az áramlás a zavarástól minden időben mentes marad. Az ilyen jellegű áramlásokat hangsebesség fölötti áramlásoknak hívjuk.

Ha a hidrodinamikai módszereket a technikailag fontos alkalmazások szempontjából vizsgáljuk, akkor a karakterisztikáknak előbb ismertetett tulajdonsága miatt nagyjában a következő felosztást nyerjük:

1) $\lim \left(\frac{|\mathfrak{v}|}{c}\right) = 0$, azaz a végtelen nagy hangsebesség határesetét. Ha a nyomáskülönbségek végesek, akkor $d\varepsilon = 0$. E feltételek tehát inkompresszibilis folyadékok vizsgálatára vezetnek.

A technikailag fontos problémáknak (mint pl. a szárnyelmélet) módszerei még e határeset keretén belül is általában feltételezik a kis zavarósebességekkel való lineárizációt, tehát az

1*a*) $\lim \left(\frac{|\mathfrak{v}_s|}{W_0}\right) = 0$ határesetet.

2) $\lim \left(\frac{c}{|\mathfrak{v}|}\right) = 0$, azaz a hangsebességhez viszonyítva igen nagy áramlási sebességet.

A technikailag leginkább fontos problémák, mint pl. a stacionárius vagy instacionárius térbeli, különösképpen a forgásszimmetrikus áramlások kérdése tudásunk mai állása mellett általában szintén csak a

2*a*) $\lim \left(\frac{|\mathfrak{v}_s|}{W_0}\right) = 0$ határeset feltételezésével oldhatók meg.

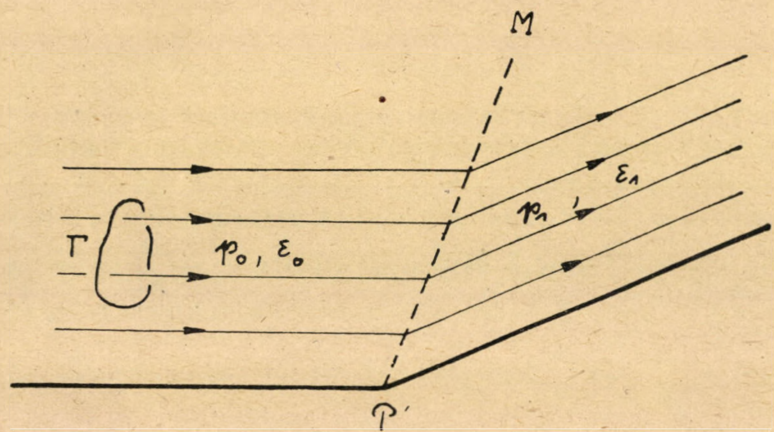
Ez utóbbi esetben azonban még egy alapvető nehézség adódik. Be kell ugyanis bizonyítanunk, hogy a 2) határesetben feltételeink, közöttük különösen a folyadék forgásmentessége és adiabatikus állapotváltozása, nem vezetnek fizikai ellentmondáshoz.

Egyszerűség kedvéért vizsgáljuk a folyadék síkbeli áramlását a 3. ábrán látható szög mentén. Az áramlás a határt alkotó szögszárak *P* csúcspontjának zavarási gócpontja miatt a *PM* Mach-féle vonal mentén ú. n. sűrítési ütközéssel megy át p_0, ε_0 állapotból a p_1, ε_1 állapotba. Az ilyen ütközési folyamatok nem reverzibilisek, mivel szükségszerűen entrópiaváltozással járnak. Ez a tény tehát sarkalatos ellentétben áll áramlásunk feltételezett adiabatikus jellegével.

Ezen irreverzibilis folyamat nyomásegyenlete a következő

$$\frac{1}{\varkappa-1}\left(\frac{p_1}{\varepsilon_1}-\frac{p_0}{\varepsilon_0}\right)=\frac{p_0+p_1}{2}\cdot\left(\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_0}{\varepsilon_1\varepsilon_0}\right).\text{[8]}$$

Ha ebben az egyenletben az $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}$ kifejezést $\frac{p_1-p_0}{p_0}=\frac{\Delta p}{p_0}$ hatványai szerint sorba fejtjük, akkor az irreverzibilis ütközési és a reverzibilis adiabatikus esetre vonatkozó két sorbafejtés



3. ábra.

$\frac{\Delta p}{p_0}$ másodfokú tagjáig bezárólag azonos: $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}=1+\frac{1}{\varkappa}\frac{\Delta p}{p_0}+$ $+\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2+\cdots$. A lineárizáció $\lim\left(\frac{|v_s|}{W_0}\right)=0$ feltételének érvényesítése után tehát nincs különbség az adiabatikus és ütközési eset között. A fenti megközelítéssel az adiabatikus folyamat feltétele és fizikai tartalma az ütközési folyamatnak ebben a határesetében is érvényes.

Ugyanez áll a forgásmentesség feltételénél is. Ha egy folyékony zárt vonal cirkulációját Γ-val jelöljük, akkor

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\oint\frac{dp}{\varepsilon}=\begin{cases}=0 & \text{az adiabatikus esetben}\\ \neq 0 & \text{az ütközési esetben.}\end{cases}$$

[8] GEIGER—SCHEEL: Handbuch der Physik. Bd. VII. S. 325 u. 294.

Az előbbinek megfelelő sorfejtés figyelembevételével látjuk, hogy az ütközési folyamat alatt a cirkuláció $\left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^4$ nagyságrendben változik meg. Ha tehát az áramlás az ütközés előtt cirkulációtól mentes volt, a fenti határesetben az ütközés után is az marad.

Ha az áramló folyadékba helyezett test éles csúccsal fordul az áramlással szembe, s azonkívül a test profilérintőjének szöge elég kicsiny, a 2) határeset $2a$) korolláriuma érvényes, s ennek értelmében fennállanak a következő egyenletek

$$\begin{aligned} W &= W_0 - w(x, r), \qquad & p &= p_0 + \Delta p, \\ V &= \quad v(x, r), & \varepsilon &= \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon. \end{aligned} \tag{5}$$

Itt p_0, ill. ε_0 a W_0 párhuzamos áramlás sztatikus nyomását, ill. sűrűségét jelölik és Δp, $\Delta\varepsilon$ ezeknek az adatoknak a megfelelő zavarósebességek által létrehozott változását adják. Ezeknek nagyságrendje $w, v \ll W_0$; $\Delta p, \Delta\varepsilon \ll p_0, \varepsilon_0$. E nagyságrendi reláció lineáris kihasználásával a BERNOULLI-egyenlet $\frac{p_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{\Delta p}{p_0} - \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}\right) \approx \approx \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} W_0 w_1'(x, r)$ alakot ölti, az adiabata egyenlete pedig átmegy a $\frac{\Delta p}{p_0} \approx \varkappa \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0}$ egyenletbe. E két egyenlet együttesen szolgáltatja a $\Delta p \approx W_0 \varepsilon_0 w(x, r)$ lineáris megközelítését.

Ha a lövedék profilérintőjének irányát $\frac{d\varrho}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$-val jelöljük, akkor a lövedék tengelyének irányában a $2\pi\varrho(x)ds$ palástelemre ható elemi erő

$$dK_1 = \Delta p\big(x, \varrho(x)\big) \sin\alpha \, 2\pi\varrho(x) \frac{ds}{dx} dx.$$

Jelöljük a lövedék fenekén uralkodó nyomást p_1-el, amely p_0, W_0, c_0 és $\varrho(x)$ függvénye. E szerint a lövedékre ható lineárizált ellenállás K kifejezése

$$K = \pi\varrho^2(l)(p_0 - p_1) + 2\pi W_0 \varepsilon_0 \int_{x=0}^{l} w\big(x, \varrho(x)\big)\varrho(x)\varrho'(x)dx = K_B + K_F. \tag{6}$$

Az első tag a lövedék fenékellenállása, a második a lövedék szűkebb értelembe vett alaki ellenállása.[9]

---

[9] Igen érdekes az előbbieket a lövedékellenállás technikai elméletének értelmezésével (pl. CRANZ: Ballistik Bd. 1. S. 36...107 nyomán) összehasonlítani.

Az első tag közelebbi vizsgálatával a következőkben nem foglalkozunk, csupán a szűkebb értelembe vett alaki ellenállásra szorítkozunk.

2. A lineárizált differenciálegyenlet és megoldása. Ha az (1) és (2) differenciálegyenletekbe bevezetjük (5) egyenleteinket, ha ezután a két egyenletből kiküszöböljük a w függvényt és lineáris megközelítéssel elhanyagoljuk a felsőbbrendűen kicsiny tagokat és végül figyelembe veszszük, hogy a Mach-féle szöggel $\frac{W_0^2-c_0^2}{c_0^2} \approx \operatorname{cotg} \vartheta$, akkor a zavarósebesség radiális komponensének meghatározására a

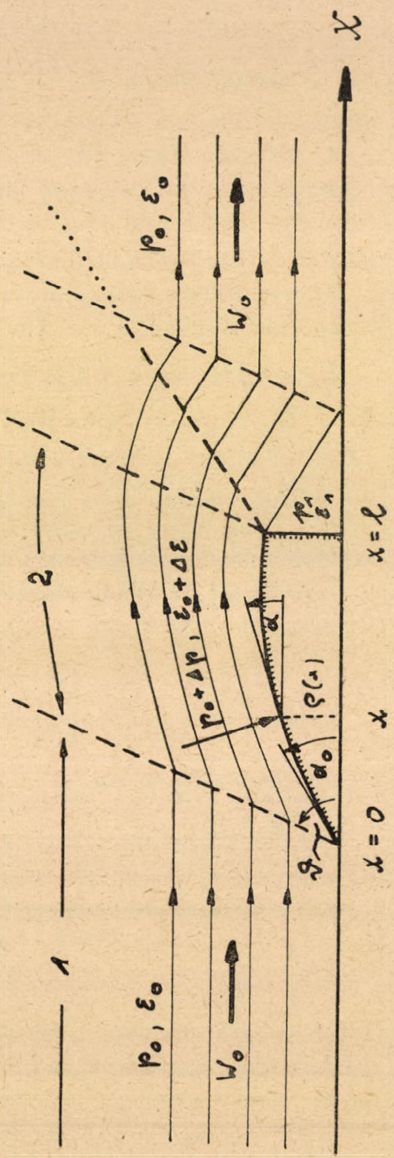
$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{1}{r^2}v-\operatorname{cotg}^2\vartheta\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \qquad (A)$$

differenciálegyenletet nyerjük.

E differenciálegyenletet a következő határfeltételekkel kell megoldanunk:

Ha $x<0$, akkor $v=0$, azaz a lövedék előtt a párhuzamos áramlás zavarásmentesen érvényesül. (A_1)

A lövedék felszínén az áramlás sima lefolyású, azaz, ha $0 \leq x \leq l$ és $r=\varrho(x)$, akkor



4. ábra.

$$\frac{d\varrho}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{v(x, \varrho(x))}{W_0 - w(x, \varrho(x))} \approx \frac{v(x, \varrho(x))}{W_0}. \qquad (A_2)$$

Ezt a következőkben $W_0 \frac{d\varrho}{dx} = v(x, \varrho(x))$ alakban fogjuk felhasználni.

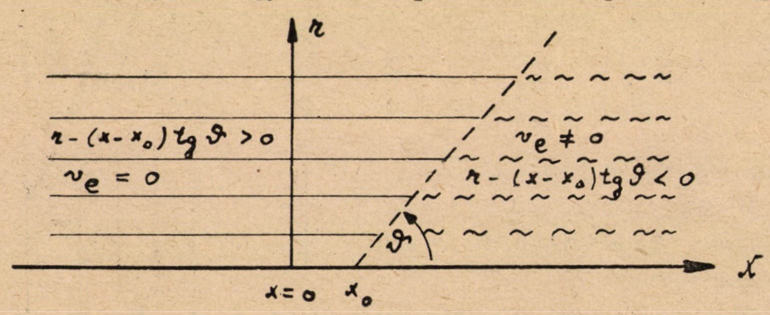
A differenciálegyenlet és e két határfeltétel egyértelműen meghatározza az (1) és (2) tartományban a resultáns áramlás sebességi mezejét és ezzel egyidejüleg a lövedék szűkebb értelemben vett alaki ellenállását.

Az (A) differenciálegyenletnek (A_1) és (A_2) határfeltétellel való megoldása céljából a $v = R(r)\,X(x)$ szorzati megoldásból, ahol

$$R(r) = AH_1^1(zr) + BH_1^2(zr), \qquad X(x) = Ce^{iz \operatorname{tg} \vartheta x} + De^{-iz \operatorname{tg} \vartheta x}$$

és z az x és r változóktól független parametert jelent, a $v_P = -H_1^1(zr)e^{-i(x-x_0)\operatorname{tg}\vartheta z}$ partikuláris megoldást vesszük és ezt a komplex z-síkban $v_e = \int\limits_{\curvearrowright} v_P\,dz = -\int\limits_{\curvearrowright} H_1^1(zr)e^{-i(x-x_0)\operatorname{tg}\vartheta z}dz$ képzésével a megjelölt kampós úton integráljuk.

Lineárizált és hangsebességen felüli problémák esetében a differenciálegyenlet egy alkalmas partikuláris megoldásának egy



5 ábra.

megfelelő út mentén képezett kampósintegrálja[10] az eredeti párhuzamos áramlásnak a $P(x_0, 0)$ zavarógócpontból kiinduló elemi zavarósebességét adja (5. ábra). Ezzel (A) és (A_1) teljesül. Tekintettel arra, hogy e zavarósebességnek x_0 mentén való sűrű-

[10] «Hakenintegral» pl. Rothe—Ollendorff—Pohlhausen: Funktionentheorie, vagy Breisig: Theoretische Telegraphie, 1924.

ségeloszlása felől még szabadon rendelkezhetünk, e sűrűségeloszlás célszerű megválasztásával az (A_2) határfeltételeit is kielégíthetjük.

Könnyű belátni, hogy a $v_e = \int\limits_{\curvearrowright} v_P dz$ kampósintegrál elemi megoldása a $P(x_0, 0)$ pontba lokalizált és problémánk fizikai feltételeinek megfelelő zavarásnak, azaz $v_e = \begin{cases} =0 \\ \mp 0 \end{cases}$ ha $r-(x-x_0)\operatorname{tg}\vartheta \gtreqless 0$, a PM Mach-féle vonal mentén való diszkontinuált átmenettel. E célból a kampósintegrált a negatív η-tengely mentén felhasított z-síkban lezárjuk a K_o resp. K_u félkörrel és (ez utóbbi esetben) az elágazási metszés mentén haladó VZ úttal (6. ábra). A Cauchy-féle tétellel

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{-R\curvearrowright+R} + \oint\limits_{(K_o)}\right) = 0,$$

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{-R\curvearrowright+R} + \int\limits_{(K_{u1})} + \oint\limits_{(VZ)} + \int\limits_{(K_{u2})}\right) = 0.$$

A Hankel-féle függvény főértéke (F. É.) a jobb félsíkban $-\pi/2 \leq \theta \leq +\pi/2$, $z = |z| e^{i\theta}$ értékekre definiált. Analitikus folytatását (A. F.) a $H_1^1(ze^{i\pi}) = H_1^2(z)$, $H_1^2(ze^{-i\pi}) = H_1^1(z)$ egyenlet adja. A nullapont körülfutására vonatkozó összefüggés $H_1^1(ze^{\pm i\pi}) = -H_1^1(z) \pm 2J_1(z)$ (lekörözési reláció).[11] Kicsiny $|z|$ értékekre a nullapont körüli kifejtés alakja

$$H_1^1(z) = -\frac{2i}{\pi z} - O^1(z)\log z + \bar{O}^1(z),$$

ahol $O^1(z)$ reguláris és a $z=0$ helyen z-vel ugyanolyan rendűen eltűnő függvényt jelöl. Nagy $|z|$ értékekre nézve a

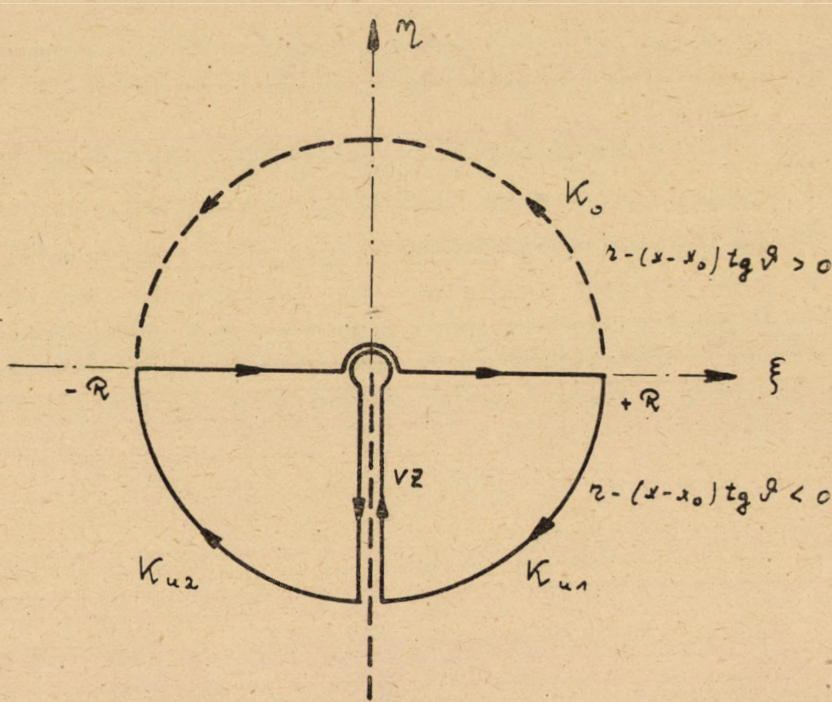
$$H^{1,2}_1(z) \sim e^{\pm i\left(z-\frac{3\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,(P_{1n}+Q_{1n}),$$

$$P_{1n} = 1 + O_p^1\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad Q_{1n} = O_q^1\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

aszimptotikus kifejezés érvényes.

---

[11] «Umlaufrelation» pl. Nielsen: Handbuch der Cylinderfunktionen, 1904.



6. ábra.

Ezek szerint tehát

$$\oint_{(K_0)} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \text{F. É.} + \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \text{A. F.}$$

Ha a második integrálba a $\varphi = \pi - \theta$ változót helyettesítjük be, akkor

$$\oint_{(K_0)} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} H_1^1(rRe^{i\theta})\, e^{-i(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta R(\cos\theta + i \sin\theta)}\, Rie^{i\theta} d\theta +$$

$$+ \int_{\varphi=\pi/2}^{0} H_1^2(rRe^{-i\varphi})\, e^{-i(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta R(-\cos\varphi + i\sin\varphi)}\, Rie^{-i\varphi} d\varphi$$

és így

$$\left| \oint_{(K_0)} \right| \leqq \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left\{ \left| H_1^1(rRe^{i\theta}) \right| + \left| H_1^2(rRe^{-i\theta}) \right| \right\} e^{(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta R \sin\theta} R d\theta \sim$$

$$\sim \text{konst.} \int_{\theta=0}^{\pi/2} e^{-R\sin\theta[r-(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta]} \sqrt{R}\, d\theta.$$

Ha $r-(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta>0$, akkor az integrálnak az $R\to\infty$ esetben is van értelme és határértéke nulla.

Ugyanígy kimutatható, hogy az $r-(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta<0$ esetben

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{(K_{u1})}^{\curvearrowleft} + \int_{(K_{u2})}^{\curvearrowright}\right) = 0.$$

Elemi megoldásunk tehát a következő nem folytonos egyenletet szolgáltatja:

$$v_e = \int_{\curvearrowright} v_P dz = \begin{cases} 0 \\ -\int_{(VZ)}^{\curvearrowright} v_P dz \end{cases} \quad \text{ha} \quad r-(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta \gtrless 0,$$

mely problémánk határfeltételének és érvényességi tartományának fizikai diszkontinuitásának megfelel.

A még fenmaradt integrál értékének az elágazási metszés mentén való meghatározása céljából $\int_{(VZ)}^{\curvearrowright}$ integrálunkat felbontjuk két integrál összegére. Ezek közül az első az elágazási pont körül vett $\oint_{(0)}$, a másik pedig az elágazási pont lekörözésének kihagyásával értelmezett $\int_{(VZ)}^{\curvearrowright\,\prime}$ Cauchy-féle főérték. Az első integrálnak a Hankel-féle függvény nullakifejtésével $\oint_{(0)} = \frac{4}{r}$ az értéke. A második integrált felbontjuk az

$$\int_{(VZ)}^{\curvearrowright\,\prime} = \lim_{\varphi\to-\frac{\pi}{2}}\left(\int_{R=\infty}^{0} \text{F. É.}\right) + \lim_{\psi\to-\frac{3\pi}{2}}\left(\int_{R=0}^{\infty} \text{A. F.}\right)$$

összegre, s integrációs útként a két $z_{1,2}=R\,\exp.\,[i(\varphi;\,\psi)]$ félegyenest választjuk.

Ha mostan az első integrálba a $\varphi+\pi=\varepsilon$, a másodikba pedig a $\psi=\chi+\pi$ változót helyettesítjük és ha figyelembe vesszük a lekörözési összefüggést, akkor a következő eredményt nyerjük:

$$-\int\limits_{(VZ)} v_r dz = \lim_{\varepsilon\to\pi/2}\int\limits_{R=\infty}^{0} H_1^1(rRe^{i\varepsilon}e^{-i\pi})\,e^{-i(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta Re^{i(\varepsilon-\pi)}}e^{i(\varepsilon-\pi)}dR +$$

$$+\lim_{\chi\to\pi/2}\int\limits_{R=0}^{\infty} H_1^1(rRe^{i\chi}e^{i\pi})\,e^{-i(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta Re^{i(\chi+\pi)}}e^{i(\chi+\pi)}dR =$$

$$= i\int\limits_{R=0}^{\infty}\{H_1^1(rRie^{-i\pi}) - H_1^1(rRie^{i\pi})\}\,e^{-(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta R}dR =$$

$$= -4i\int\limits_{R=0}^{\infty} J_1(rRi)\,e^{-(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta R}dR.$$

Ha ebbe az integrálba bevezetjük $J_1(z)$ integrál definícióját és ha az integrációs sorrendet felcseréljük, akkor

$$i\int\limits_{R=0}^{\infty} J_1(rRi)\,e^{-(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta R}dR =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\cos\varphi\int\limits_{R=0}^{\infty} e^{-[(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta + r\cos\varphi]R}dRd\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi=0}^{\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta + r\cos\varphi} = \frac{1}{r} - \frac{(x-x)\,\mathrm{tg}\,\vartheta}{r\sqrt{(x-x_0)^2\,\mathrm{tg}^2\vartheta - r^2}}.$$

A lényegtelen koefficiens elhagyásával az elemi zavarósebesség radiális komponense tehát

$$v_e = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{x-x_0}{r\sqrt{(x-x_0)^2 - r^2\,\mathrm{cotg}^2\vartheta}} \end{cases},\quad r-(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta \gtrless 0.$$

A (2) differenciálegyenlet felhasználásával pedig az elemi zavarósebesség axiális komponensére nézve a

$$w_e = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 - r^2\,\mathrm{cotg}^2\vartheta}} \end{cases},\quad r-(x-x_0)\,\mathrm{tg}\,\vartheta \gtrless 0$$

kifejezést kapjuk.

Ha a pozitív x-tengely mentén elhelyezett elemi zavarások sűrűségét $f(x_0)dx_0$-al jelöljük, akkor e zavaráselosztás rezultáns sebességének komponensei

$$\frac{v}{w}(x, r) = \int_{x_0=0}^{\infty} \frac{v_e}{w_e}(x, r; x_0) f(x_0) dx_0$$

alakban írhatók fel. Mivel a szerint, amint $x - r \operatorname{cotg} \vartheta \lesseqgtr x_0$, $\left.\begin{matrix} v_e \\ w_e \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} = 0 \\ \neq 0 \end{matrix}\right.$, azért az x_0-ra nézve ∞-ig terjedő integrál átmegy az

$$v(x, r) = \frac{1}{r} \int_{x_0=0}^{x-r \operatorname{cotg} \vartheta} \frac{f(x_0)(x-x_0)\, dx_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 - r^2 \operatorname{cotg}^2 \vartheta}}, \tag{7a}$$

illetőleg

$$w(x, r) = \int_{x_0=0}^{x-r \operatorname{cotg} \vartheta} \frac{f(x_0)\, dx_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 - r^2 \operatorname{cotg}^2 \vartheta}} \tag{7b}$$

kifejezésbe. Ez a két integrál adja meg a zavarósebességek végérvényes alakját.

Ha most figyelembe vesszük az (A_2) határfeltételt, akkor az $f(x_0)$ meghatározására az ú. n. KÁRMÁN-féle

$$W_0 \varrho(x) \frac{d\varrho}{dx} = \int_{x_0=0}^{x-\varrho(x) \operatorname{cotg} \vartheta} \frac{f(x_0)(x-x_0)\, dx_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 - \varrho^2(x) \operatorname{cotg}^2 \vartheta}} \tag{8}$$

integrálegyenletet nyerjük.

Ezzel tehát hidrodinamikai ellenállási problémánkat az adott feltételeknek megfelelő és a numerikus számításra alkalmas (6), (7), (8) egyenletek egyértelműen megoldják.

3. A Kármán-féle integrálegyenlet numerikus megoldásáról.

a) Először a 2α nyílásszögű forgáskúp különösképp egyszerű esetét vegyük tekintetbe. Ekkor $\varrho(x) = x \operatorname{tg} \alpha$ és

$$f(x_0) = \text{const.} = \frac{W_0 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \vartheta - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

kielégíti integrálegyenletünket.

A zavarósebességekre a következő zárt kifejezéseket nyerjük:

$$v(x,r)=k\operatorname{cotg}\vartheta\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2\operatorname{tg}^2\vartheta-1},$$

$$w(x,r)=K\ln\left[\left(\frac{x}{r}\operatorname{tg}\vartheta+\sqrt{\left(\frac{x}{r}\right)^2\operatorname{tg}^2\vartheta-1}\right]\right..$$

Ezekből a kúpnak $F_B=\pi\varrho^2(l)$ alapterületére vonatkoztatott alaki ellenállását az $a=\dfrac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\alpha}=1\cdots\infty$ rövidítés bevezetésével a

$$\frac{K_F}{F_B}=\varepsilon_0 W_0^2\operatorname{tg}^2\alpha\,\frac{a\ln\left[a+\sqrt{a^2-1}\right]}{\sqrt{a^2-1}}$$

egyenlet szolgáltatja.

Az $\alpha=\text{const.}\leqq\vartheta$ esetben tehát, $\vartheta\approx\pi/2$ feltételével

$$\frac{K_F}{F_B}\sim\varepsilon_0 W_0^2\operatorname{tg}^2\alpha\ln\left(2\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\quad\text{és}\quad\lim_{\vartheta\to\alpha}\left(\frac{K_F}{F_B}\right)=\varepsilon_0 W_0^2\operatorname{tg}\alpha.$$

Ha pedig $\vartheta=\text{const.}$, de $a\gg 1$ akkor, $\dfrac{K_F}{F_B}\approx\varepsilon_0 W_0^2\operatorname{tg}^2\vartheta\dfrac{\ln 2a}{a}$.

b) Megadott $r=\varrho(x)$ meridiángörbéjű lövedék esetében a $\varrho(x)$ görbét első megközelítéssel a

$$\varrho(x)\approx\varrho_i(x)=\varrho(x_i)+(x-x_i)\operatorname{tg}\alpha_i,\quad x_i\ldots x\ldots x_{i+1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_i=\frac{\varrho(x_{i+1})-\varrho(x_i)}{\Delta x},\quad x_{i+1}-x_i=\Delta x,\quad x_i=i.\Delta x,$$

húrsokszöggel helyettesítjük.

Ha $x_i\ldots x\ldots x_{i+1}$ és ha rövidség kedvéért bevezetjük a $\xi_i=x_i-\varrho(x_i)\operatorname{cotg}\vartheta$ jelölést, végül, ha a $\xi_\lambda\ldots u\ldots\xi_{\lambda+1}$ intervallumban a sűrűségelosztást megközelítőleg az $f(u)=c_\lambda$ lépcsőgörbével approximáljuk, akkor első megközelítésben integrálegyenletünk a

$$W_0\{\varrho(x_i)+(x-x_i)\operatorname{tg}\alpha_i\}\operatorname{tg}\alpha_i=\int\limits_{u=0}^{x-\varrho_i(x)\operatorname{cotg}\vartheta}\frac{f(u)\,(x-u)\,du}{\sqrt{(x-u)^2-\varrho_i^2(x)\operatorname{cotg}^2\vartheta}}=$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{i-1}c_{\lambda+1}\int\limits_{u=\xi_\lambda}^{\xi_{\lambda+1}}\frac{(x-u)\,du}{\sqrt{(x-u)^2-\varrho_i^2(x)\operatorname{cotg}^2\vartheta}}+$$

$$+\,c_{i+1}\int\limits_{u=\xi_i}^{x-\varrho_i(x)\operatorname{cotg}\vartheta}\frac{(x-u)\,du}{\sqrt{(x-u)^2-\varrho_i^2(x)\operatorname{cotg}^2\vartheta}}$$

egyenletbe megy át.

Ha integráljainkba az $x_{i+1}-u=\varrho(x_{i+1})\cot\vartheta v$ egyenlet segítségével bevezetjük a v változót és ha $x=x_{i+1}$ tesszük, akkor

$$W_0 \operatorname{tg} a_i = \sum_{\lambda=0}^{i} c_{\lambda+1} \operatorname{cotg} \vartheta \int_{v_\lambda}^{v_{\lambda+1}} \frac{v dv}{\sqrt{v^2-1}}$$

egyenletet nyerjük. Ebben az egyenletben

$$v_\lambda = \frac{x_{i+1}-x_\lambda+\varrho(x_{\lambda+1}) \operatorname{cotg} \vartheta}{\varrho(x_{i+1}) \operatorname{cotg} \vartheta}.$$

A c_λ értékek rekurrens meghatározására tehát rendelkezésünkre áll az

$$W_0 \operatorname{tg} a_i \operatorname{tg} \vartheta = \sum_{\lambda=0}^{i} c_{\lambda+1} (\sqrt{v_{\lambda+1}^2-1} - \sqrt{v_\lambda^2-1})$$

egyenletrendszer. A c_λ-k meghatározása után a zavarósebességek, s ezek segítségével a W_F ellenállás numerikusan kiszámíthatók.

c) Ha feltesszük, hogy a sűrűségi elosztásnak nulla pont körüli TAYLOR-sora

$$f(x_0) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_\lambda}{\lambda!} x_0^\lambda$$

a szükséges intervallumban konvergál, akkor a sűrűségelosztásnak egy folytonos megközelítését nyerhetjük.

Integrálegyenletünk az előbbi feltétel mellett következő alakot ölti:

$$W_0 \frac{d\varrho}{dx} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_\lambda}{\lambda!} \varrho^\lambda(x) \int_{u=p}^{x/\varrho(x)} \frac{u}{\sqrt{u^2-p^2}} \left(\frac{x}{\varrho(x)} - u\right)^\lambda du,$$

ahol $p = \operatorname{cotg} \vartheta$. Legyen a meridiángörbe nulla pont körüli konvergens sorfejtése $\varrho(x) = \operatorname{tg} a_0 x + a_2 x^2 + \cdots$.

E sorfejtésből meghatározzuk: $x(\varrho) = \operatorname{cotg} a_0 \varrho + a_2 \varrho^2 + \cdots$,

$$\frac{d\varrho}{dx} = \operatorname{tg} a_0 + \frac{b_1}{1!} \varrho + \frac{b_2}{2!} \varrho^2 + \cdots.$$

Ezen sorok közös konvergencia-tartományában fennáll a

$$W_0 \sum_{\lambda=0}^{n-1} b_\lambda \frac{\varrho^\lambda}{\lambda!} + W_0 \frac{b_n}{n!} \varrho^n [1 + O^1(\varrho)] =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{c_\lambda}{\lambda!} \varrho^\lambda \varphi_\lambda(\varrho) + \frac{c_n}{n!} \varrho^n \varphi_n(\varrho) [1 + \overline{O}^1(\varrho)]$$

egyenlet, amelyben

$$\varphi_\lambda(\varrho) = \int\limits_{u=p}^{\frac{x(\varrho)}{\varrho}} \frac{u}{\sqrt{u^2-p^2}} \left(\frac{x(\varrho)}{\varrho} - u\right)^\lambda du = \lambda! \int\limits_p^{\frac{x(\varrho)}{\varrho}} (\lambda) \int \frac{udu}{\sqrt{u^2-p^2}}$$

és $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{1}{q}$ kifejezést jelöl.

Ha az előbbi egyenletet ϱ^n-el átosztjuk, akkor a $\varrho \to 0$ határ-átmenettel a

$$\lim_{\varrho \to 0} \left[W_0 \sum_{\lambda=0}^{n-1} b_\lambda \frac{\varrho^\lambda}{\lambda!} - \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{c_\lambda}{\lambda!} \varrho^\lambda \varphi_\lambda(\varrho) \right] \frac{1}{\varrho^n} + W_0 \frac{b_n}{n!} = \frac{c_n}{n!} \dot{\varphi}_n(0)$$

egyenletet nyerjük. A lim jel alatt álló kifejezés $\left(\frac{0}{0}\right)$ határozatlan alakú. n-szeres differenciálással tehát a c_λ-k meghatározására a

$$W_0 \frac{b_n}{n!} - \lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\varrho^n} \sum_0^{n-1} \frac{c_\lambda}{\lambda!} \varrho^\lambda \varphi_\lambda(\varrho) = \frac{c_n}{n!} \varphi_n(0)$$

rekurziós képletet kapjuk. Mivel fennáll a

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{d^n\left(\varrho^\lambda \varphi_\lambda(\varrho)\right)}{d\varrho^n} = \lim_{\varrho \to 0} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (\varrho^\lambda)^{(n-\nu)} \varphi_\lambda^{(\nu)}(\varrho)$$

identitás és mivel $(\varrho^\lambda)^{(n-\nu)} = \begin{cases} 0 \\ \lambda! \\ k\varrho^{\lambda-n+\nu} \end{cases}$ a szerint, amint $n - \nu \gtreqless \lambda$, azért a $\varrho \to 0$ határátmenettel a

$$W_0 b_n - \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{c_\lambda}{\lambda!(n-\lambda)!} \varphi_\lambda^{(n-\lambda)}(0) = c_n \varphi_n(0), \quad n \geqq 1$$

egyenletet nyerjük, ahol

$$\varphi_\lambda(0) = \int_{u=p}^{q} \frac{u(q-u)^\lambda}{\sqrt{u^2-p^2}}\, du.$$

Ebből és az $n = 0$ esetre érvényes $W_0 b_0 = c_0 \varphi_0(0)$ egyenletből kiszámíthatjuk a c_λ együtthatókat.

Borbély Sámu.

ÜBER DIE NÄHERUNGSWEISE HYDRODYNAMISCHE BESTIMMUNG DES GESCHOSSWIDERSTANDES.

Bei rotationssymmetrischer Überschallströmung wird das Widerstandsproblem mit hinblick auf technisch wichtige Anwendungen hinsichtlich den Lösungsmöglichkeiten diskutiert, der geometrisch-physikalische Gehalt der Charakteristiken, sowie die Voraussetzungen der Linearisation, den Bedingungen der Wirbelfreiheit und des adiabatischen Vorganges betreffend, näher erörtert, und im speziellen Falle des schlanken Geschosses zur systematischen Bestimmung der v. KÁRMÁN'schen Störgeschwindigkeiten eine Methode mit Hilfe von Hakenintegralen angegeben.

S. v. Borbély.

A HANGZÓKÉPZŐ ÜREGEK REZONANCIAADATAI.

Bevezetés.

A hangzóképző üregek tulajdonságainak megismerése elsősorban a magánhangzók fizikai vizsgálata által válik lehetővé. A formánshelyek (rezonanciafrekvenciák) megállapítása mellett újabban sikerült az egyes formánsoknak a megfelelő üregekkel való azonosítását elvégezni. Sovijärvi[1] állandó formánsokat is talált (mellüreg és kapcsolt részei, valamint az orrüreg) a vokálisonként változó formánsokon (garat, száj- és ajaküreg és ezek kombinációi) kívül.

A csillapítás értékét először közvetlenül az üregek lecsengéséből próbálták meghatározni. S. Garten[2] néhány sora után csak sokkal később W. Trendelenburg[3] közölt kísérleti eredményeket. Ezek az eredmények néhány magánhangzó alsó formánsára vonatkoznak. A vizsgálatoknál a szájüreg gerjesztése természetesen kívülről történt. Egy Lewis[4] által ajánlott módszer szerint az éneklés közben fellépő magasságingadozás felhasználható a rezonanciaszélességnek[5] a felhangspektrumból való meghatározására. Ezzel a módszerrel Lewis és Tuthill[6] saját vizsgálataimmal egyidőben néhány amerikai ejtésű magánhangzóra meghatározta a rezonanciaszélességet, melyből a csillapítás szintén megkapható.

---

[1] Sovijärvi: Proc. 3. Internat. Congress of Phonetic Sciences. Ghent, 1938. 407.

[2] S. Garten: Abh. math.-phys. Kl. sächs. Akad. Wiss. 38 (1921.)

[3] W. Trendelenburg: Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., Physik.-math. Kl. 1936. XXII. 308—321.

[4] Don Lewis: J. Acous. Soc. Am. 8. 91. (1936.)

[5] A rezonanciaszélességet (frequency-band, Halbwertsbreite) energiarezonancia esetén a maximum 0·5-szeresénél, amplitudórezonancia esetén pedig a maximum 0·707-szeresénél mérjük.

[6] D. Lewis—C. Tuthill: J. Acous. Soc. Am. 11. 451. (1940.)

Az üregek csatolásának kérdése számszerűleg igen nehezen fogható meg. Sem PAGET szintetikus vizsgálatai,[7] sem STEWART elektromos rezgőkörökből felépített analogonja[8] nem adnak erre felvilágosítást. Csak annyit említenek, hogy a csatolások lazák. Ugyanez W. TRENDELENBURG véleménye is, aki a regisztertörés vizsgálatakor megállapította, hogy a rezonátorüreg-rendszernek a hangszalagokra bizonyos esetekben visszaható zavarása nem csatolási okok miatt történik.[9]

Ezekhez a vizsgálatokhoz kapcsolódik a jelen dolgozat. Célja a vokálisspektrumokból az üregek rezonanciagörbéinek a megrajzolása és a rezonanciaadatoknak a görbékből való kiszámítása.

1. Kísérleti eljárás.

A LEWIS idézett cikkében megállapított és mások által, valamint saját felvételeimen is megfigyelt hangmagasságingadozás (2. hangkép) kizárja a több periódust összefoglaló automatikus elemző eljárások alkalmazási lehetőségét. A dolgozat céljainak legjobban megfelel a legrégibb módszer: a beszélt vagy énekelt hangrezgéseket filmre venni és a megfelelően kiválasztott periódusokat megelemezni.

A felvételekhez Brush-kristálymikrofont használtam. A kísérleti személy egy kisméretű vattafalú fülkében a mikrofontól különböző távolságban arra merőlegesen énekelt vagy beszélt. A mikrofon karakterisztikája a mérések szerint 50—10,000 Hz között lineárisnak volt tekinthető. A fülkéből rövid árnyékolt huzal vezetett a kívül álló kétfokozatú ellenálláserősítőhöz. Ezután még az AEG katódcsőoszcillográffal egybeépített erősítőt is használtam. Az összeállítás frekvenciafüggését, erősítését és torzítását tiszta szinuszos feszültséggel vizsgáltam. Az egész rendszer linearitása 50—10,000 Hz között teljesen kielégítőnek mutatkozott. A katódcső ernyőjén kapott kép analizálásából a torzítási tényező 2—3%-nak

---

[7] Sir A. PAGET: Proc. of the Roy. Soc. London. A. CII. 752. (1923.)

[8] J. Q. STEWART: Nature. 110. 311. (1922.)

[9] W. TRENDELENBURG: Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., Physik.-math. Kl. 1938. I. 5—22., XXI. 188—226., Proc. 3. Internat. Congress of Phonetic Sciences. Ghent. 1938. 188.

adódott. Az erősítést a vizsgálatoknál lehetőleg azonosnak tartottam és inkább a kísérleti személynek a mikrofontól való távolságát változtattam a hang erőssége mértékében 5—10 cm-től 60—80 cm-ig, mivel az előzetes kísérletek szerint a távolság változtatása a hangkép alakját nem befolyásolta. Az utógyorsítással ellátott oszcillográf fényerőssége megfelelő volt — jó fényerejű (1 : 2) lencse mellett — nagy filmsebességgel készült felvételekhez is. Mivel a hangkép az analízishez akkor a legmegfelelőbb, ha a periódus hossza az amplitudó nagyságával megegyezik, 600 Hz alaphangú normális erősségű női énekhez 10—12 m/sec filmsebességet kellett használnom. Az összehasonlító időjelzés a váltóáram 50 periódusa: a filmszalag szélén intenzitásfelvétellel rögzítettem a századmásodperceket.

A kísérletek során 1939 és 42 között 7 férfi és 7 nő (részben operaénekesek) hangjáról összesen kb. 400 felvételt készítettem: részben énekelt magánhangzókról, részben jól megválasztott magyar szavakról, részben pedig a szájüreg közvetlen lecsengéséről. Ugyanazon személy hangzóiról nem csak a magasság, hanem az erősség változtatásával is több felvétel készült, sőt az összehasonlítás kedvéért néhány énektechnikailag hibásan énekelt és néhány nyelvjárásban ejtett magánhangzó is szerepelt.[10] A FOURIER-analízishez a RUNGE-féle módszert[11] alkalmaztam, felhasználva a munkát egyszerűsítő táblázatokat.[12] Az analízis hibája a magasabb rendszámú tagok felé növekszik. Korrekciós eljárások alkalmazása mégis fölösleges, mert az elemzést igyekeztem elég nagy rendszámig kiterjeszteni Az elemzéseket általában 18, ritkább esetben 24, sőt 36 felhangig végeztem.

A grafikus módszer hibája 3—5% lehet a legnagyobb előforduló amplitudóhoz viszonyítva, de a rajzolás közben fellépő szubjektív

---

[10] TARNÓCZY T.: A magyar magánhangzók akusztikai szerkezete. (P. P. Tud. egy. Ált. Nyelvészeti és Fonet. Int. Tanulmányok. 2) Budapest, 1941.

[11] C. RUNGE—H. KŐNIG: Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin, 1924.

[12] HUSSMANN: Rechnerische Verfahren zur harm. Analyse und Synthese. Berlin, 1938. K. STUMPFF: Tafeln und Aufgaben zur Periodenforschung. Berlin, 1937. TEREBESI: Rechenschablonen zur harmonischen Analyse und Synthese. Berlin, 1930.

hibák ezt némileg növelték. Az elemzéshez a görbéket ugyanis kivetítettem és milliméterpapírra rajzoltam át.[13] Az amplitudó-meghatározás összhibája tehát a legkedvezőtlenebb esetben a legnagyobb előforduló amplitudó 8—10%-a. A dolgozathoz mintegy 120 kiértékelés eredményét használtam fel.

2. Rezonanciák keletkezése.

HELMHOLTZ alapján[14] a hangszalagok rezgését tiszta periódikusnak tekintjük, melynek FOURIER sora sok nagyerősségű felhangból áll. A felhangok mindegyike «kényszererő», mely az üregeket gerjeszti. A csatolásnak itt olyan értelmezést kell adnunk, hogy az üregek a nagy energiájú forrásból laza érintkezéssel veszik fel az energiát a nélkül, hogy a forrásra lényegesen visszahatnának. Ezt igazolják W. TRENDELENBURG említett regisztervizsgálatai is.

Az üregekben előálló kényszerrezgés nyomásamplitudója vagy ezzel arányos sebességamplitudója jellemző az üreg rezonanciagörbéjének megfelelő helyére. Ha az egyik kényszererő erősségét állandónak tartjuk, s közben a frekvenciáját folytonosan változtatjuk, a mérhető sebességamplitudók leírják az üreg rezonanciagörbéjét. Célunk ennek a $v(\omega)$ függvénynek kísérleti meghatározása.

A kényszerrezgés ismert differenciálegyenletének megoldását felírva $v(\omega)$-t a következő alakban kaphatjuk:

$$v(\omega) = a \frac{\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \qquad 1.$$

ahol ω_0 a δ csillapítási tényezőjű üreg saját körfrekvenciája, az a arányossagi tényező pedig a differenciálegyenlet megfelelő konstansaiból alkotott kifejezés.

---

[13] A kiértékelési eljárás és a hibabecslés részletesebb leírása az említett dolgozat 8—11. oldalán található.

[14] H. v. HELMHOLTZ: Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig. 6. Aufl. 1913. 168. Az amerikai szerzők nem fogadják el minden szempontból ezt a harmónikus elméletet (steady-state theory) és inkább HERMANN nem-harmónikus elméletét használják a hangzókeletkezés magyarázására. Viszont F. TRENDELENBURG: Proc. 3. Internat. Congress of Phonetic Sciences. Ghent, 1938. 128. kimutatta a két elmélet lényegi azonosságát és az utóbbinak a fonetikában való mellékesebb szerepét.

1. A rezonanciamaximum (formánsmag) helye a fenti függvény szélső értéke. Ha δ helyett a logaritmikus dekrementumot

$$A = 2\pi\delta/\omega_0$$

vezetjük be, a kérdéses hely

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - {}^1/_2 \left(\frac{A}{\pi}\right)^2} \qquad 2.$$

Az itt szereplő legnagyobb csillapításoknál az $\omega_r = \omega_0$ megközelítés 3—4%-os hibát jelent a rezonanciapont meghatározásánál.

2. A logaritmikus dekrementumot a $v(\omega)$ görbe és az ezt 0·707 v_{max} magasságban metsző egyenes ω_1 és ω_2 metszési pontjaiból határozzuk meg.

$$A \sim 2\pi \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2 + \omega_1} = \pi \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \qquad 3.$$

ahol $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ rezonanciaszélesség, vagy félértékszélesség.

3. Rezonancia esetén legyen $\omega_r = \omega_0$ és $\omega = 2\pi\nu$, ekkor 1-ből

$$a = 2\nu . A . v_{max} \qquad 4.$$

A $A . v_{max}$ értékek — mint később megmutatjuk — némi felvilágosítást nyujtanak az említett laza kapcsolódások ismeretéhez.

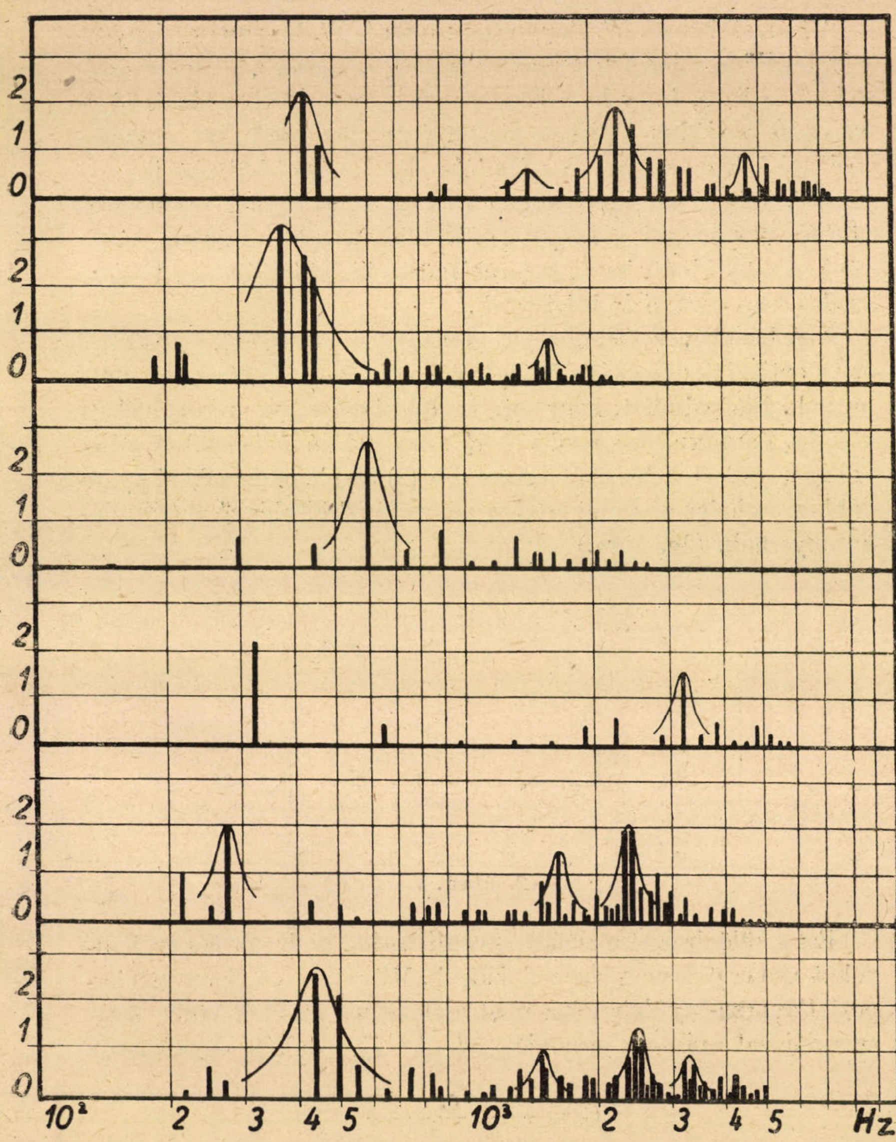
3. A $v(\omega)$ megszerkesztése.

A $v(\omega)$ függvény megszerkesztése a spektrumvonalak sűrítésével történhetik. Csak a beszélt hangoknál használtam fel a LEWIS-féle magasságingadozást a sűrű spektrum előállítására. (1. és 2. hangkép és az 1. és 2. spektrum az első ábrán.) Általában lépcsőzetesen emelkedő magasságú alaphangon énekeltettem a vokálist. Az éneklés dur vagy moll hármashangzaton, kistercekből felépített szűkített szeptimhangzaton, vagy a durskála hangfokain történt. (5—9., 13—27. hangkép és a megfelelő spektrumok.) Magasabban fekvő formánsok vizsgálatához mély alaphang esetén egy spektrum is elegendőnek bizonyult. (3. hangkép, 3. spektrum.)

Igen fontos kérdés, hogy szabad-e az ilyen módon kapott többszörös vonalas spektrumot folytonos burkoló vonallal rezonanciagörbévé alakítani. Ezt a kérdést három szempontból kell megvizsgálnunk.

1. Nem ismerjük pontosan a «kényszererők» arányát, azaz a hangszalag rezgésének FOURIER-sorát. FLETCHERnek az a feltevése,[15] hogy a sor koefficiensei a rendszám valamelyik hatványával csökkennek, nem fogadható el minden kritika nélkül.

[15] H. FLETCHER: Speech and hearing. New-York, 1929. 50.

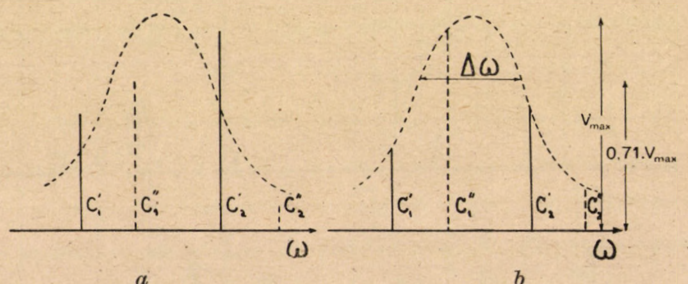


1. ábra. Hangspektrumok.

1. 391*a*, *b* felv. V. női hang, beszélt *i* (430 és 465 *Hz*).
2. 511*a*, *b*, *c* felv. VII. férfi hang, beszélt *ö* (190, 210 és 225 *Hz*).
3. 351 felv. III. férfi hang, énekelt *å* (150 *Hz*).
4. 189 felv. I. férfi hang, énekelt *u* (322 *Hz*).
5. 198*a*, *b*, *c* felv. I. férfi hang, énekelt *ö* (215, 246 és 272 *Hz*).
6. 190*a*, *b*, *c* felv. I. férfi hang, énekelt *ü* (212, 248 és 272 *Hz*).

A hangszalagnak W. TRENDELENBURG és W. HARTMANN árnyékfelvételei[16] alapján feltételezett rezgését analizálva, a kapott értékekből látható, hogy ha a hangszalagok nyitott állapotának ideje az egész periódus idejéhez viszonyítva elég kicsi, két egymásmelletti felhang rezgési amplitudója elég kevéssel különbözik egymástól. Tehát, bár igyekeznünk kell az egyes üregek rezonanciagörbéit ugyanazzal a kényszererővel kitapogatni, mégsem követünk el nagy hibát, ha a rezonanciagörbe kialakításába 2—3 szomszédos kényszererő is belejátszik.

2. A hangképek elemzésének eredményei a hangerő, az erősítés és az optikai megnagyítás függvényében is nagy eltéréseket mutathatnak. Előfordulhat, hogy míg az (1) alaphangon erősen énekelt vokális FOURIER-sora rendre a c_i' amplitudójú felhangokat adja, addig ugyanazt a hangzót magasabb (2) alaphangon sokkal gyengébben énekelve abszolút értékre nézve jóval kisebb c_i'' amplitudókat nyerünk. (2*a*. ábra.)



2. ábra.

Ezt a különbséget csak úgy egyenlíthetjük ki, ha az összes hangokat azonos összenergiára redukáljuk. Másszóval az elemzéssel kapott FOURIER-együtthatókat rendre elosztjuk az illető görbe összenergiájával arányos mennyiséggel. Az új redukált együtthatók

$$C_i = \frac{c_i}{\sqrt{{}^1/_p \int_0^p y^2 dx}}$$

[16] W. TRENDELENBURG—W. HARTMANN: Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., Physik-math. Kl. 1937. XXVIII. 391.

ahol p a periódus hossza és $y=f(x)$ a hangkép egyenlete. A szükséges négyzetintegrálokat szintén grafikus úton határoztam meg. A C^i redukált együtthatók már alkalmasak a $v(\omega)$ előállítására. (2*b*. ábra.)

3. Az alaphang erősségének megváltoztatása más szempontból is hibát okozhat: megzavarhatja a spektrális eloszlást. Stout[17] amerikai szerző a spektrumot 1800 Hz-nél kétfelé osztva a keletkezett két rész intenzitása arányát vizsgálta, miközben az alaphang magasságát és erősségét változtatta. Jelen kísérletek szerint ez a hatás az ott találtnál kisebb mértékű és az eredményeket nem zavarja; csak az alaphang magasságának változtatásával kaphatunk lényegesen más spektrális eloszlást, de a rezonanciaüregek tulajdonságai ekkor sem változnak meg és a jelenség magyarázata is egyszerű.

4. Eredmények.

I.

A rezonanciahelyekre vonatkozó eredményeket a következőkben foglalhatjuk össze.

1. A kiemelkedő formánsok száma az *u*, *o*, *å* csoportban egy, ill. kettő. A második formáns határozottan csak az *å*-nál van meg. Az *u* és *o* kialakításában a felső formánsok általában nem játszanak szerepet.

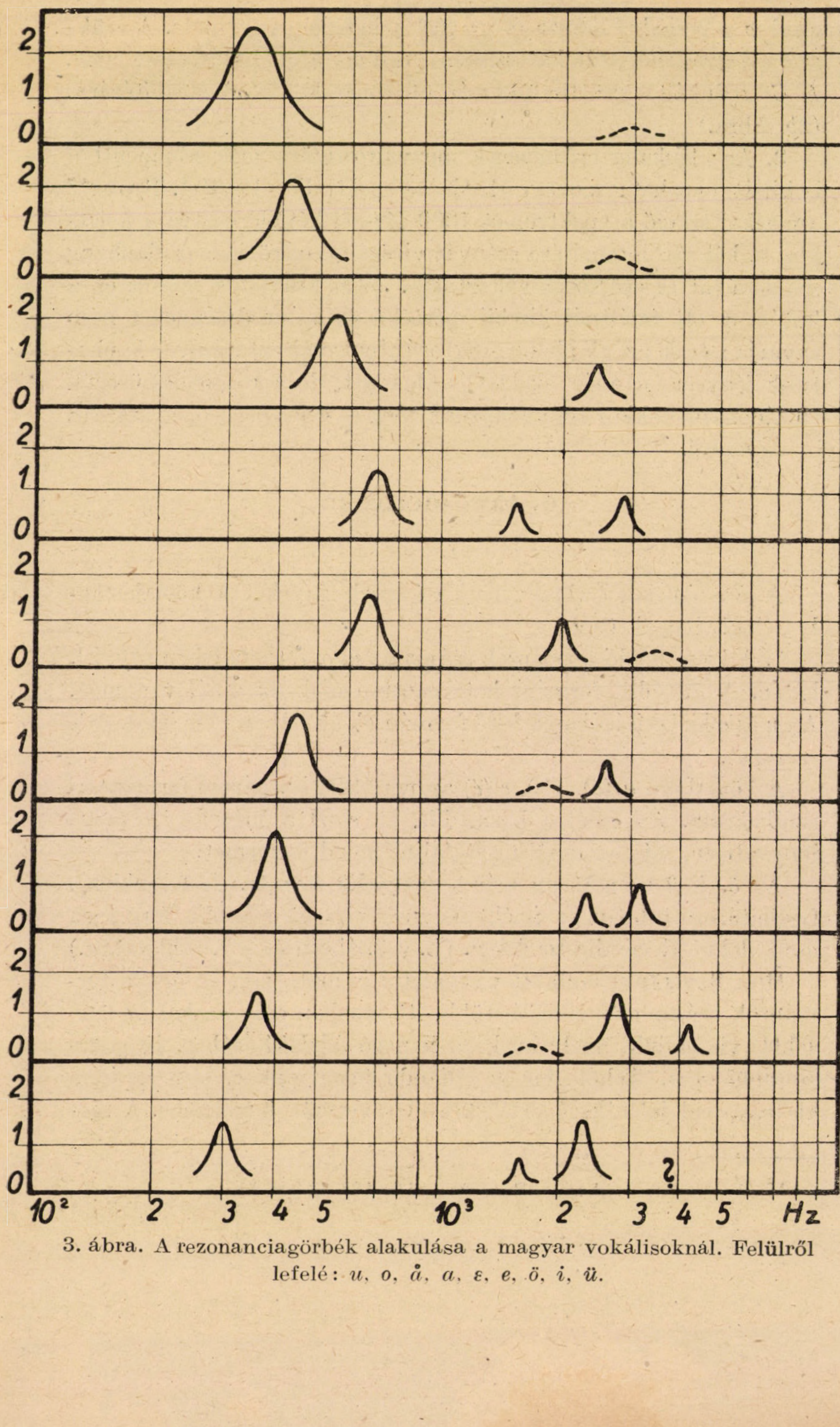
A következő *a* (*á*), *ɛ*(*e*), *e* (*é*) csoport két, ill. három formánssal rendelkezik. Az *ɛ*-nél a harmadik, az *e*-nél a második formáns lényegtelen, míg az *a*-nál megtaláljuk mind a hármat.

Az *ö*, *i*, *ü* csoportban már a negyedik formáns is felbukkan. Leghatározottabban az *i*-nél, melynek viszont második formánsa nem alakul ki mindig rendesen. (L. a 3. ábrán és a 1. táblázaton.)

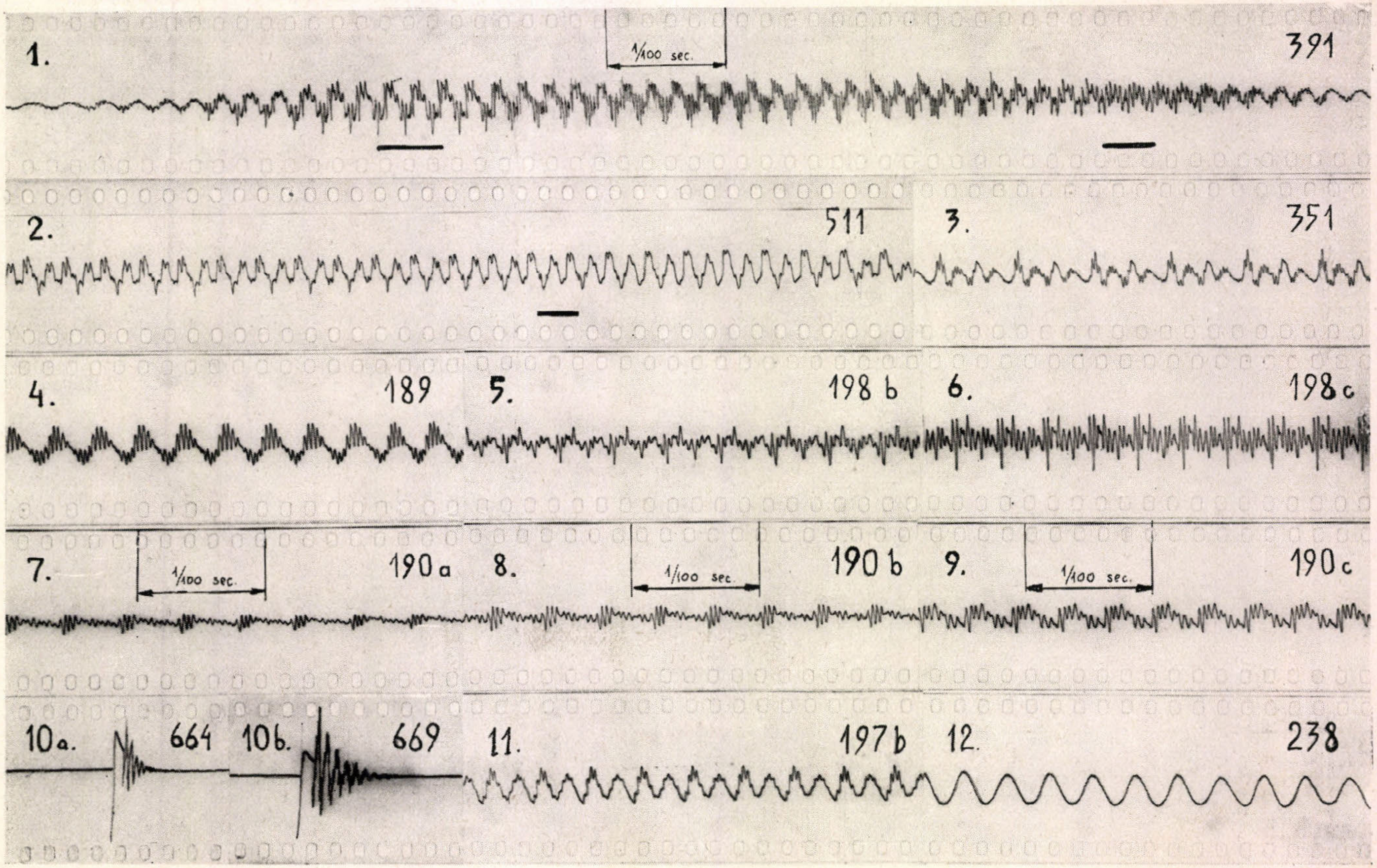
Mint Sovijärvi említett vizsgálatai is mutatják, az összes formánsok száma még ennél is több, itt azonban csak azokat az üregeket vizsgáljuk, melyeknek a hangzó kialakításában lényeges szerepük van. Tehát sem az állandó formánsokat, sem az igen kis $v_{\max}$-mal jelentkező értékeket nem vesszük figyelembe. A ma-

---

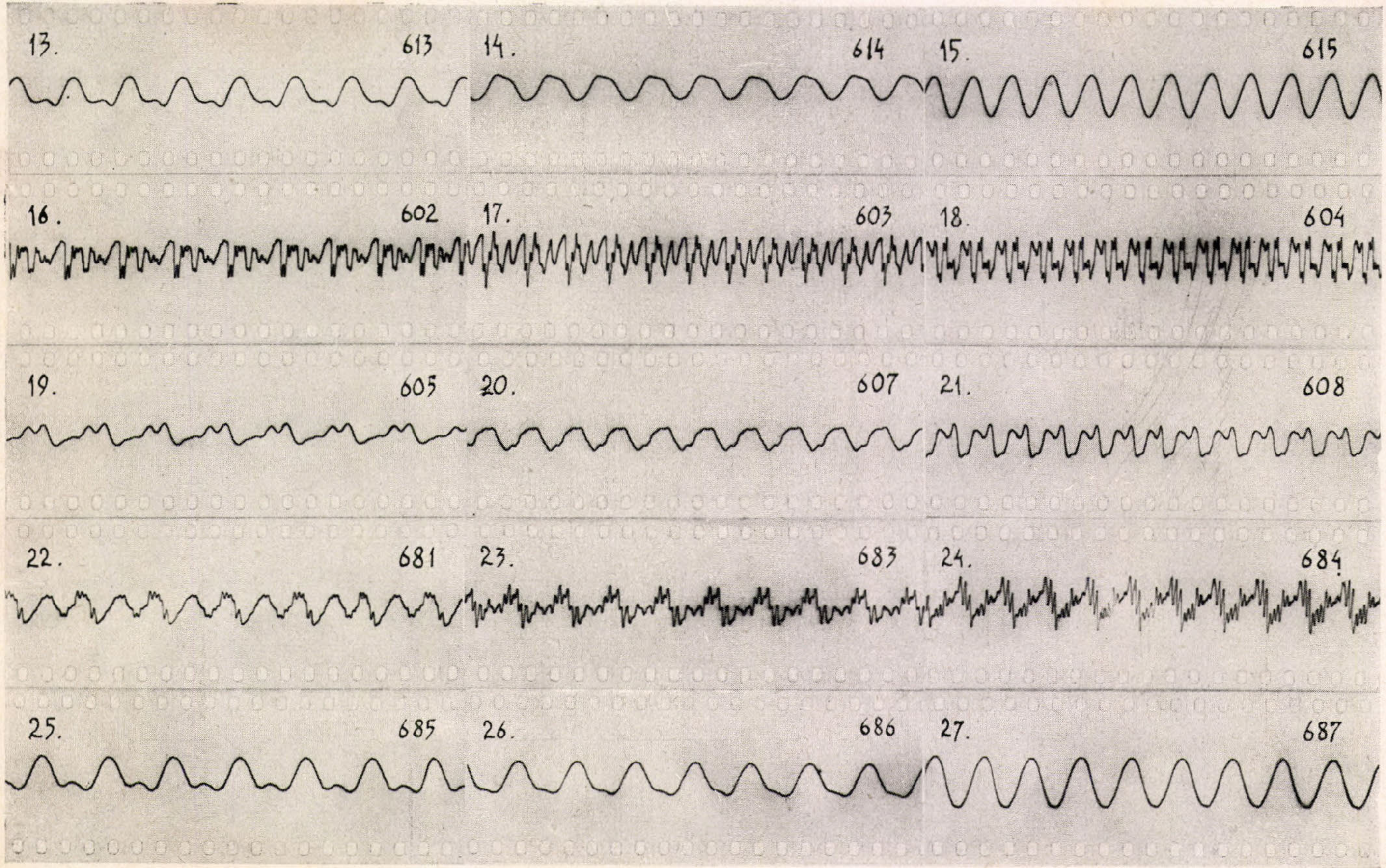
[17] B. Stout: J. Acous. Soc. Am. 10. 137. (1938.)



3. ábra. A rezonanciagörbék alakulása a magyar vokálisoknál. Felülről lefelé: *u*, *o*, *å*, *a*, *ε*, *e*, *ö*, *i*, *ü*.



I. hangképsorozat.



II. hangképsorozat.

gyar vokálisok képzésénél az orrüreg mindig zárva van,[18] más üregek vagy nagyon kevés energiát vesznek át a hangszalagoktól, vagy igen nagy a csillapításuk. (Pl. az *u* és *o* felső formánsa.)

A táblázat az összes feldolgozott spektrumból nyert formánstartomány elhelyezkedését mutatja.

1. táblázat.

A magánhangzók formánshelyei.

	1.	2.	3.	4.
u	280—380		(2800—3000)	
o	380—480		(2500—2700)	
å	480—640		2400—2600	
a	600—800	1200—1600	2600—2800	
ε	600—700	1600—2400	(3000—3400)	
e	350—500	(1600—1800)	2400—2800	
ö	350—450	1800—2600	3000—3200	
i	320—450	(1600—2000)	2400—3200	4000—
ü	250—350	1600—1800	2200—2700	?

2. Előfordulhat az az eset, hogy két felhang — pl. az alaphang és az oktávja— éppen közrefogja az egyik rezonátorüreg rezonanciahelyét, s így ott rezonancia nem tud kialakulni. Ilyenkor áll elő az említett arányváltozás az intenzitáselosztásban a felső formánsok javára. Sőt ilyen esetben a különben fel sem bukkanó felső formánsok jelentékenyen megerősödhetnek és mint pótformáns szerepelnek.[19]

3. Magasan énekelt hangoknál az alaphang az alsó formáns fölé kerül. Kérdés, hogy mi biztosíthatja ilyenkor a hangzó jellegét. Néhány errevonatkozó kísérlet valószínűvé teszi, hogy a jelleg akkor marad meg, ha pótformánsok fellépnek. Ez azonban inkább férfihangoknál fordult elő, magas női hangoknál tisztán énekelt

---

[18] Bárczi Gusztáv: A magyar beszédhangok képzése. Budapest, 1928.

[19] Ilyen az *u* és *o* magas formánsa. A 4. hangkép és a 4. spektrum egy ilyen *u*-t ábrázol, míg a 12. kép alaphangja éppen az üreg sajátfrekvenciája, tehát közel szinuszalakú.

u és *o* hangzót alig találtam. Igen sok függ az üregek alakíthatóságától, ami egyéni sajátság. Az üregek alakításával állanak elő a fedett és nyílt hangzószínezetek. Néhány kísérlet megmutatta, hogy az előbbi esetben az alsó, az utóbbiban pedig a felső formánsok javára tolódik el az intenzitáseloszlás. Ez esetben tehát elsősorban az üregnek a hangszalaghoz való kapcsolódása változik meg.

II.

A $v(\omega)$ függvény rezonanciaszélességét és ebből a logaritmikus dekrementumot a 3. egyenlet alapján a folytonossá kiegészített spektrumokból határoztam meg. A következő táblázat az *ü* hangzóra kapott értékeket mutatja. (Ahol az adatok hiányoznak, ott vagy a formáns nem alakult ki, vagy $v(\omega)$ görbe nem volt megbízható.)

2. táblázat.

Az *ü* hangzó üregeinek saját frekvenciája és logaritmikus dekrementuma.

Felv. száma	1.		2.		3.	
	ν_0	Λ	ν_0	Λ	ν_0	Λ
190	270	0·45	1620	0·3	2400	0·26
239	265	0·56	2100	0·24	2700	0·25
512	—	—	1500	0·3	—	—
204	—	—	1700	0·45	2400	0·27
293	360	0·5	—	—	2500	0·38
572	340	0·4	1700	0·3	—	—
Középérték:	310	0·48	1730	0·32	2500	0·29

Megjegyzés: A 190. sz. *ü* hangzót a 7—9. hangkép, az adatait az 5. spektrum mutatja.

A Λ értékekből az üregek lecsengési ideje[20] is kiszámítható. Az összes hangzóra kapott eredmények középértékeit a 3. táblázat mutatja.

[20] Azon idő, mely alatt a csillapított szabad rezgés amplitudója ezredrészére csökken.

3. táblázat.

A hangzóképző üregek rezonanciaadatai.

	1.			2.			3.			4.		
	ν_0	Δ	$\tau \times 10^2$	ν_0	Δ	$\tau \times 10^2$	ν_0	Δ	$\tau \times 10^2$	ν_0	Δ	$\tau \times 10^2$
u	330	1·4*	1·8									
o	430	1·2	1·6									
	680	**0·8**	**1·4**									
å	540	1·0	1·4				2500	0·35	0·83			
a	700	0·6	1·8	1400	0·4	1·3	2800	0·28*	0·91			
	820	**0·38**	**0·35**									
ε	650	0·6*	1·9	2000	0·3	1·2						
	980	**0·45**	**1·65**									
e	430	0·75	2·3				2600	0·35	0·8			
ö	400	0·45	3·8	2200	0·3	1·1	3000	0·25*	0·95			
i	380	0·45	4·3	**1360**	**0·53**	**0·93**	2800	0·3	0·85	4000	0·3	0·6
				1260	**0·34**	**1·65**						
ü	300	0·48	5·2	1700	0·32	1·3	2500	0·29	0·98	?	0·25*	

Megjegyzések: A *-gal jelölt értékek számításához csak egy vagy két spektrum állt rendelkezésre.

A vastagbetűs értékek közvetlen lecsengési adatok.

A négy formánscsoport világos elválása látszik a lecsengési idők különbözőségéből is. A másodiknál 1,2, a harmadiknál 0,9, a negyediknél 0,6.10—2 sec. a lecsengési idő. Az első formánst illetőleg ismét három részre oszthatjuk a magánhangzókat. Az *u, o, å* csoportban 1,6, az *a, ε, e* csoportban 2,0 és az *ö, i, ü* csoportban 4,4.10—2 sec. a lecsengési idő értéke.

A kapott csillapításértékek 3—4-szer nagyobbak a W. Trendelenburg által találtaknál. Ennek okát több tényben is lehet keresni.

1. A közvetlen vizsgálatnál a gerjesztés kívülről történt. Ha az üregek a szájnyíláson keresztül kapcsolódnak a hangforráshoz, a kísérleti körülmények mások, mint a hangszalagos gerjesztésnél. Ennek ellenőrzésére olyan lecsengésfelvételeket készítettem, melyeknél a gerjesztés a szájüregben történt.

2. Énekléskor a hangszalagok nyitódása és záródása következ-

tében is lényegesen más a helyzet, mint a nyugodt légzés szalagállásakor. GARTEN magyarázata szerint[21] légzéskor a hangszalagok nyitva lévén, az üregek úgy szerepelnek, mint két végén nyitott cső, énekléskor azonban a periódus legnagyobb részében, mint egyik végén zárt cső. Ezért egyrészt a szikrafelvételekkel kapott sajátfrekvenciák magasabban fekszenek, másrészt éneklés közben a rezonanciahely (formánsmag) egy periódus alatt a nyitott és zárt állapotnak megfelelőleg ingadozik. Az utóbbi megjegyzésnek a rezonanciahely meghatározása szempontjából nincs gyakorlati jelentősége, mert a meghatározáshoz legalább egy teljes periódust fel kell használnunk. Ellenben gondolhatunk arra, hogy a rezonanciamaximum bármily kis periódikus helyváltoztatása a rezonanciagörbét kiszélesíti. GARTEN elméletét továbbvíve, fejhangnál (falzett) a formánsok mélyebbre kerülése[22] és a rezonanciák élesedése várható. Falzettnél ugyanis — mint az gégetükörrel ellenőrizhető — a hangszalag csak kb. harmadrészére nyílik ki, ellentétben a mellhang teljes hosszrezgésével, s ezzel mégjobban megközelíti a zárt állapotot. Ennek a kérdésnek eldöntésére szintén végeztem kísérleteket.

3. Lépcsőzetes éneklés esetén az üregek fínom utánaálló képessége folytán a rezonanciahely kicsit elmozdulhat. Ezzel is szélesebbek lesznek a rezonanciagörbék. Az elmozdulás mindig úgy történik, mintha a legközelebbi felhang a rezonancia helyét kicsit maga felé húzná.

Az 1. ábra 5. spektrumán a harmadik formáns helyén a 216 *Hz* alaphang 11. felhangja 2376 *Hz*-nél teljesen azonos amplitudóval jelentkezett, mint a 248 *Hz* alaphang 10. felhangja 2480 *Hz*-nél. Ha ez a 100 *Hz* valóban ilyen elhangolódás, akkor a dekrementumot kétszeresére növelte. Ennek a hatásnak a kiküszöbölése egyetlen alaphang alkalmazásával érhető el. Természetesen csak magas formánsoknál.

---

21 S. GARTEN i. m. II. 19—20.

22 GARTEN ezt i. m.-ban éppen fordítva gondolta; valószínű, hogy a fejhangképzés mechanizmusát máskép képzelte el: «Ich habe bei Versuchen an einer Sängerin in Giessen mehrfach feststellen können, dass die Formanten bei Kopfstimme regelmässig höher lagen, als bei Bruststimme».

III.

A hangzóképző üregek fala különböző abszorbeáló képességgel rendelkezik: ez okozza a különböző üregek más-más csillapítását. Az üregek alakíthatósága azonban megengedi, hogy ugyanaz az üreg különböző csillapítással és sajátfrekvenciával is szerepelhessen. Összehasonlításképpen vegyük az *u* és *ü* hangzók formánsait. Az *u* mélyformánsa sokkal erősebben csillapított, mint a rokon *ü* hangzóé, valószínűleg azért, mert az *u* lényegében egyformánsú lévén az egységes garat-hátsószájüregben a lágy részek lazán maradnak. Az utóbbi azonban többformánsú: a hátsó szájüregben keletkezik a második, az elülső szájüregben a harmadik formáns és esetleg még egy negyedik is van. Tehát a garatüregnek meglehetősen ki kell tágulnia, hogy belső térfogatával egyedül is biztosítsa az *u*-éval nagyjából azonos sajátfrekvencia értéket. A kitágulással a lágy részek megfeszülnek, s ezért a csillapítás kisebb lesz. Hasonló meggondolásokkal elvégezhetjük a vokálisonként változó formánsoknak a keletkezési üregekkel való azonosítását. Az első formánscsoportot a garatüreg rezonanciái adják, de az *u*, *o*, *å* csoportnál, mivel ott második formáns nincs, a garat és hátsószáj egységes üreget alkot. A második és a harmadik formáns a szájüregnek a nyelvvel két részre osztásával lép fel, míg a negyedik formáns keletkezési helye az ajaküreg vagy a nyelvalatti üreg lehet. Az *ɛ* és *e* hangzóknál az egyik vagy másik szájüregformáns nem alakul erőteljesen ki. Negyedik formánst határozottan csak az *i*-nél találtam.

A csillapítások a ható kényszererők ismerete mellett a $v_{\max}$-okat is meghatározzák. De előfordulhat az is, hogy ugyanazon csillapításértékkel rendelkező formánsok különböző $v_{\max}$-ot érnek el a szerint, hogy az illető üregre a hangszalag eredeti energiájának több vagy kevesebb része hat pl. azért, mert a üreg a hangforrástól távolabb vagy ahhoz közelebb van. Ez utóbbi vonatkozást neveztük el az üregek hangszalaghoz való kapcsolódásának, amelynek ismeretéhez tehát a

$$\Lambda \cdot v_{\max}$$

érték jellemző adat. (A $v_{\max}$ értékek aránya a 3. ábráról olvasható le.) Az adatok összevetéséből azt láthatjuk, hogy a legerősebb kapcsolódása a garatüregnek van, éspedig az *u, o, å* hangzócsoportnál.

Figyelemreméltó, hogy az *i* és *ü* harmadik formánsának megfelelő elülső szájüreg majdnem úgy kapcsolódik, mint ugyanazon hangzók garatürege. Lehet, hogy ezt a szájnyílás sugárzó ellenállása okozza, mert a viszonylag kis szájnyílás a magasabb rezgésszámokat jobban sugározza ki.[23]

5. Az ellenőrző kísérletek.

Az említett ellenőrző kísérleteket 1942. évben végeztem el két részben. Lecsengésfelvételekhez a BÉKÉSY által leírt[24] szikrakisüléses eljárás célravezetőnek bizonyult, bár a kisülés alaphangjának zavaró hatását a kísérletek során nem sikerült teljesen kiküszöbölni (10*a*. és 10*b*. hangkép). A kísérleti személy a vékony szondát a nyelv fölött kb. a szájüreg közepéig vitte be és a helyes üregállást a vokális hangoztatásával ellenőrizte.

A kísérletek eredményeit a 3. táblázat vastagbetűs adatai mutatják. Természetesen csak olyan magánhangzókat választhattunk, ahol a szájnyílás elég nagy és a nyelv nem szorul nagyon fel, ellenkező esetben a szonda zavarja a kísérletet. Ezért nem foglalkozunk az *i*-re kapott eredményekkel. A másik három hangzónak (*o, a, ε*) első formánsát lehetett meghatározni a lecsengésből. A rezonanciahely kb. 50%-kal fekszik magasabban, a dekrementum pedig ugyanennyivel kisebb, mint az énekelt vokálisnál. A formánshelyek megfelelnek a várakozásnak és egyeznek W. TRENDELENBURG eredményeivel is. Az így gerjesztett üregek dekrementumértékei azonban még mindig két-háromszor akkorák, mint az elölről gerjesztett üregekéi. Ugyanezzel a szikrakisüléssel megkíséreltem szájüregelőtti gerjesztést is, azonban a kisülés alaphangja annyira zavaró volt, hogy csak a lecsengési időből lehetett visszaszámítani a dekrementumot. Ez már meglehetősen megközelítette W. TRENDELENBURG eredményeit.

A lecsengésvizsgálatokból tehát azt állapíthatjuk meg, hogy GARTEN alapgondolatából kialakított elképzelésünk valóban helytálló ; a hangszalagrés nyitott vagy zárt állapota más dekrementum-

---

[23] J. DE BOER—K. DE BOER: Philips' techn. Rdsch. 5. 6. (1940.)
[24] G. V. BÉKÉSY: Akus. Zs. 2. 223. (1937.)

értéket eredményez. Nagyobb azonban az a különbség, amit azonos hangszalagrés mellett a gerjesztés helyének különfélesége okoz.

A kísérletek második részében ugyanazon személy mellhangon és fejhangon énekelt hangzóinak összehasonlítását végeztem el. Az eredmények szerint a fejhangon énekelt hangzók formánsai 15—20%-kal kerülnek mélyebbre, de a csillapításban semmi különbséget nem mutatnak a mellhangon énekeltekhez képest. Ez tehát annyit jelent, hogy a fejhangnál a hangszalagrés valóban kisebb, mint a mellhangnál, de a nyitódás ideje mindkét esetben kb. azonos.

A kísérletek során azt az érdekes jelenséget figyeltem meg, hogy a fejhangon énekelt hangzó alaphangja mindig nagy erősséggel jelentkezik. Olyannyira, hogy bármelyik hangzó felveheti az *u* tiszta szinuszos alakját, ha megfelelő magasságban énekeltetjük. (L. a 2. hangképsorozatot.)

Összefoglalás.

A diszkontinuus spektrumvonalak sürítésével bizonyos feltételek mellett sikerült a hangzóképző üregek rezonanciagörbéit megszerkeszteni. A görbe megrajzolásának lehetőségét elsősorban az összenergia mértékében véghezvitt redukció teremtette meg. A rezonanciagörbékből meg lehetett határozni az üregek rezonanciaadatait. Az eredmények ellenőrzésére szikrakisüléses eljárással lecsengésfelvételeket is készítettem. Az eredmények a következők:

1. Az üregek sajátfrekvenciáit normális beszélt és énekelt hang esetén az 1. táblázat mutatja. Fejhangnál a formánsok kb. 15–20%-kal mélyebben, nyugodt légzésnél (szikrakisülés) 50%-kal magasabban fekszenek. Oka: nyugodt légzéskor a hangszalagrés teljesen nyitva van, beszélt és énekelt hangnál csak a periódus igen kis törtrészében nyílik ki, fejhangnál pedig még a rés hossza is megrövidül.

2. A csillapításértékeket a 3. táblázat tünteti fel. A rezonanciagörbékből kapott dekrementumok mellhangnál és fejhangnál egyaránt meglehetősen nagyok. A belülről gerjesztett üregek lecsengéséből alsó formánsokra ezeknek az értékeknek a $^{2}/_{3}$ része adódik, a kívülről gerjesztett üregek lecsengése még sokkal kisebb értékeket eredményez.

Az eddigi lecsengésvizsgálatok alapján kapott és a rezonanciagörbékből számított dekrementumértékek tehát elsősorban valószínűleg azért térnek el egymástól, mert a gerjesztés az előbbi esetben mindig a szájüreg előtt történt.

3. Megállapítottuk, hogy a rezonanciagörbék magasságából — a csillapítás ismerete mellett — következtetéseket lehet levonni a formánsok keletkezési helyére és az üregeknek a hangszalagokhoz való kapcsolódására.

*

A kísérleteket a Műegyetem Atomfizikai Intézetében végeztem. Ezúton is köszönetet mondok ezért dr. Bay Zoltán professzor úrnak, az intézet igazgatójának. Hálásan köszönöm dr. Békésy György professzor úrnak munkámat kísérő figyelmét és értékes tanácsait. Ugyancsak köszönettel tartozom dr. Molnár Imre zeneakadémiai tanár úrnak a kísérletekben való szíves közreműködéséért.

Tarnóczy Tamás.

I. Hangképsorozat.

1—9. adatait lásd az 1. ábránál.
10*a*. I. férfi hang *i* lecsengése.
10*b*. I. férfi hang *ε* lecsengése.
11. I. férfi hang, énekelt *o* (248 *Hz*).
12. III. női hang, énekelt *u* (298 *Hz*).

II. Hangképsorozat.

13—15. I. férfi hang, fejhangon énekelt *u* (133, 156 és 177 *Hz*).
16—18. I. férfi hang, mellhangon énekelt *a* (168, 232 és 252 *Hz*).
19—21. I. férfi hang fejhangon énekelt *a* (146, 213 és 246 *Hz*).
22—24. I. férfi hang, mellhangon énekelt *ö* (128, 178 és 210 *Hz*).
25—27. I. férfi hang, fejhangon énekelt *ö* (135, 153 és 178 *Hz*).

RESONANCE DATA OF VOWEL RESONATORS.

We have succeeded in constructing the resonance-curves of vowel resonators on certain conditions by increasing the number of the lines in the discontinous spectra of vowels. The resonance data of cavities : the resonant frequencies and damping constants have been determined. We have arrived at certain conclusions as to the place of the cavities and their relations to the vocal chords. To check results extinction-diagrams have been taken by the electric spark method.

T. Tarnóczy.

KITŰZÖTT FELADATOK.

(A megoldásokat a következő címre kérjük: EGERVÁRY JENŐ, Budapest, IV. Kecskeméti-utca 4.)

13. A, B, C, D a sík adott egymástól különböző pontjai. Megszerkesztendő az a pontpár, amelyik az A, B pontpárral is és a C, D pontpárral is harmonikus csoportot alkot.[1]

(Hajós György)

14. Írjunk egy egységnyi területű konvex négyszögbe egy négyszöget úgy, hogy ennek oldalai az eredeti négyszögből négy egyenlő területű háromszöget messenek le. Bebizonyítandó, hogy a beírt négyszög területe $\geqq \frac{1}{2}$.[2] *(Fejes László)*

15. Jelentse $J_m^{(k)}$ az $1, 2, \ldots, n$ elemek azon permutációinak a számát, melyekben az inverziók száma $\equiv k (\mathrm{mod}\ m)$. Bebizonyítandó, hogy

$$J_m^{(0)} = J_m^{(1)} = J_m^{(2)} = \cdots = J_m^{(m-1)} = \frac{n!}{m} \cdot \quad (m=2, 3, \ldots, n)$$

(Krausz József)

16. Egy körbe beírunk két oly önmagát nem metsző zárt sokszöget, melyek a kör középpontját belsejükben tartalmazzák. Feltéve, hogy az első sokszög minden oldala kisebb a második sokszög minden oldalánál, bebizonyítandó, hogy az első sokszög kerülete nagyobb a második sokszög kerületénél.

(Egerváry Jenő)

---

[1] A komplex számsík két pontpárja harmonikus csoportot alkot, ha a pontjaikhoz rendelt komplex számok kettősviszonya -1.

[2] E tételt valamivel általánosabb alakban már közöltem következő dolgozatomban: Über die Approximation konvexer Kurven durch Polygonfolgen, *Compositio Mathematica*, 6, 1939, 461. l. 7. jegyzet. Az ott adott bizonyítás azonban — amint arra LÁZÁR DEZSŐ a figyelmemet felhívta — nem teljes.

MEGOLDOTT FELADATOK.

4. Legyenek $f_{ik}(x)$ $(i, k=1, 2)$ a valós x változó egyértékű folytonos valós függvényei, melyek kielégítik a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} f_{11}(x+y) &= f_{11}(x) f_{11}(y) + f_{12}(x) f_{21}(y), \\ f_{12}(x+y) &= f_{11}(x) f_{12}(y) + f_{12}(x) f_{22}(y), \\ f_{21}(x+y) &= f_{21}(x) f_{11}(y) + f_{22}(x) f_{21}(y), \\ f_{22}(x+y) &= f_{21}(x) f_{12}(y) + f_{22}(x) f_{22}(y). \end{aligned}$$

Meghatározandók az $f_{ik}(x)$ függvények.

(Kerékjártó Béla)

A 4. feladat első megoldása.

A problémát a következő függvényegyenletek megoldásaira vezetjük vissza:

$$\left.\begin{aligned} S(x+y) &= S(x)\, C(y) + C(x)\, S(y), \\ C(x+y) &= C(x)\, C(y) - S(x)\, S(y); \end{aligned}\right. \qquad (1_1)$$

$$F(x+y) = F(x) F(y); \qquad (2_1$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \qquad (3_1)$$

melyeknek folytonos és valós megoldásai (lásd például Osgood: Lehrbuch der Funktionentheorie I. 582. l.) a triviális megoldásokon kívül:

$$S(x) = e^{\lambda x} \sin \mu x, \quad C(x) = e^{\lambda x} \cos \mu x; \qquad (1_2)$$

$$F(x) = e^{\lambda x}; \qquad (2_2)$$

$$f(x) = ax. \qquad (3_2)$$

Először azokat a megoldásokat keressük, melyekben az $f_{12}(x)$ és ${}_{21}(x)$ függvényeknek legalább egyike nem azonosan zérus. E két függvény szerepének szimmetrikussága miatt elegendő, ha csak az $f_{21}(x) \not\equiv 0$ esettel foglalkozunk. Feltéve, hogy x és y oly helyek, ahol $ff_{21}(x) \neq 0$, a feladat első és harmadik egyenletében az x, y változókat felcseréljük és a nyert egyenleteket a megfelelőikből kivonjuk. Az így nyert

$$\frac{f_{12}(x)}{f_{21}(x)}=\frac{f_{12}(y)}{f_{21}(y)},\quad \frac{f_{11}(x)-f_{22}(x)}{f_{21}(x)}=\frac{f_{11}(y)-f_{22}(y)}{f_{21}(y)}$$

összefüggésekből e hányadosok állandó volta következik. Miután bármilyen két számot lehet $-pq$ és $p+q$ alakban megadni, legyen

$$f_{12}(x)=-pqf_{21}(x),\ f_{11}(x)-f_{22}(x)=(p+q)f_{21}(x). \tag{4}$$

Itt $-pq$ és $p+q$ valós számok, s így p és q valós vagy konjugált komplex számok. A későbbiek miatt megállapítjuk, hogy $p-q$ valós vagy tisztán képzetes. Ha (4) második egyenletét y-ra is felírjuk, s e két egyenlet szorzatát alkotjuk, továbbá a feladat első és negyedik egyenletét, valamint az előbbi szorzat felét összeadjuk, 2-vel osztunk, végül még (4) első egyenletét is figyelembe vesszük, erre jutunk:

$$\begin{aligned}&\frac{f_{11}(x+y)+f_{22}(x+y)}{2}=\\&=\frac{f_{11}(x)+f_{22}(x)}{2}\cdot\frac{f_{11}(y)+f_{22}(y)}{2}+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 f_{21}(x)f_{21}(y).\end{aligned} \tag{5}$$

A feladat harmadik egyenletében x-et és y-t felcseréljük, s az eredeti és új egyenlet összegének felét vesszük, így e második egyenletet nyerjük:

$$f_{21}(x+y)=f_{21}(x)\frac{f_{11}(y)+f_{22}(y)}{2}+\frac{f_{11}(x)+f_{22}(x)}{2}f_{21}(y). \tag{6}$$

Mielőtt továbbmennénk, felhívjuk a figyelmet arra, hogy (1_1)-nek (1_2) csak a valósban adja meg teljes megoldását (komplexben további megoldás pl. $S(x)=\frac{i}{2}e^{\lambda x}$, $C(x)=\frac{1}{2}e^{\lambda x}$). Ez az oka annak, hogy külön-külön foglalkozunk azzal a két esettel, midőn $p-q$ valós, ill. képzetes.

Első eset: $p-q$ valós (azaz p, q valósak). Legyen

$$\begin{aligned}G(x)&=\frac{f_{11}(x)+f_{22}(x)}{2},\quad H(x)=\frac{p-q}{2}f_{21}(x),\\F_1(x)&=G(x)+H(x),\quad F_2(x)=G(x)-H(x).\end{aligned} \tag{7}$$

Így (5), (6) a

$$G(x+y)=G(x)\,G(y)+H(x)\,H(y),\ H(x+y)=H(x)\,G(y)+G(x)\,H(y)$$

egyenletekbe megy át, melyekből pedig könnyen megállapítható, hogy

$$F_1(x+y)=F_1(x)\,F_1(y),\ F_2(x+y)=F_2(x)\,F_2(y). \tag{8}$$

Tehát a triviális megoldásokat egyelőre figyelmen kívül hagyva

$$F_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad F_2(x) = e^{\lambda_2 x}.$$

Ha $p \neq q$, a (7) egyenletek alapján

$$f_{11}(x) + f_{22}(x) = e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}, \quad f_{21}(x) = \frac{1}{p-q}(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}). \tag{9}$$

Ezekből és (4)-ből függvényeinket kiszámítva a feladat következő megoldásához jutunk:

$$\left.\begin{aligned} f_{11}(x) &= \frac{p}{p-q}e^{\lambda_1 x} - \frac{q}{p-q}e^{\lambda_2 x}, & f_{12}(x) &= -\frac{pq}{p-q}(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}), \\ f_{22}(x) &= -\frac{q}{p-q}e^{\lambda_1 x} + \frac{p}{p-q}e^{\lambda_2 x}, & f_{21}(x) &= \frac{1}{p-q}(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}). \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

(8) triviális megoldásaival és a $p = q$ esettel külön fogunk foglalkozni.

Második eset: $p - q$ képzetes (azaz p, q konjugált komplexek). Legyen

$$S(x) = \frac{p-q}{2} i f_{21}(x), \quad C(x) = \frac{f_{11}(x) + f_{22}(x)}{2}, \tag{10}$$

így (5) és (6) egyenleteink az (1_1) egyenletekbe mennek át és (1_2) alapján (konjugált komplex λ_1 és λ_2 bevezetésével)

$$S(x) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}), \quad C(x) = \frac{1}{2}(e^{\lambda_2 x} + e^{\lambda_1 x}).$$

Ezek segítségével (10) újra a (9) egyenleteket adja. Így újra az (I) megoldásra jutunk, most azonban p és q, valamint λ_1 és λ_2 nem valós, hanem konjugált komplex számpárok.

Visszatérünk a (8) egyenlet megoldásánál kihagyott triviális esetekre. Minthogy (6) és $f_{21}(x) \neq 0$ miatt $G \neq 0$, az $F_1(x)$ és $F_2(x)$ függvények mindketten nem tünhetnek el azonosan, legfeljebb egyikük. A p és q paramétereknek egyébként semmitmondó szerepcseréje az $F_1(x)$ és $F_2(x)$ függvényeket is felcseréli, elegendő tehát csak az

$$F_1(x) = e^{\lambda x}, \quad F_2(x) \equiv 0$$

esettel foglalkoznunk. Ez (7) és (4) útján a feladatnak újabb megoldását adja:

$$\left.\begin{aligned} f_{11}(x) &= \frac{p}{p-q}e^{\lambda x}, & f_{12}(x) &= -\frac{pq}{p-q}e^{\lambda x}, \\ f_{21}(x) &= \frac{1}{p-q}e^{\lambda x}, & f_{22}(x) &= -\frac{q}{p-q}e^{\lambda x}, \end{aligned}\right\} \tag{II}$$

melyben p, q, λ tetszőleges valós számok.

Abban az esetben, midőn $p=q$, (5) utolsó tagja zérus és (2_1), (2_2) szerint

$$f_{11}(x)+f_{22}(x)=2e^{\lambda x},$$

hiszen (6) és $f_{21}(x) \not\equiv 0$ miatt a triviális megoldás nem jöhet szóba. Ha ezt (6)-ba beírjuk és $e^{\lambda(x+y)}$-nal osztunk,

$$\frac{f_{21}(x+y)}{e^{\lambda(x+y)}}=\frac{f_{21}(x)}{e^{\lambda x}}+\frac{f_{21}(y)}{e^{\lambda y}}.$$

Ebből (3_1), (3_2) szerint

$$\frac{f_{21}(x)}{e^{\lambda x}}=\frac{x}{r},$$

mert $f_{21}(x) \not\equiv 0$ miatt a triviális megoldás nem léphet fel. (4)-et felhasználva így a feladatnak következő megoldását nyerjük:

$$\begin{aligned} f_{11}(x)&=\left(1+\frac{p}{r}x\right)e^{\lambda x}, & f_{12}(x)&=-\frac{p^2}{r}xe^{\lambda x}, \\ f_{22}(x)&=\left(1-\frac{p}{r}x\right)e^{\lambda x}, & f_{21}(x)&=\frac{1}{r}xe^{\lambda x}, \end{aligned} \tag{III}$$

ahol p, r, λ tetszőleges valós számok.

Rátérünk arra az esetre, midőn $f_{12}(x)$ és $f_{21}(x)$ mindketten azonosan eltűnnek. Ekkor a feladat egyenletei szerint $f_{11}(x)$ és $f_{22}(x)$ eleget tesznek (2_1)-nek, tehát (2_2) szerint

$$f_{11}(x)=e^{\lambda_1 x},\ f_{12}(x)=f_{21}(x)=0,\ f_{22}(x)=e^{\lambda_2 x},$$

amely megoldás lényegében nem új, mert (I)-ből $q=0$ helyettesítéssel és $p\to\infty$ határátmenettel áll elő. (2_1) triviális megoldása révén lehetséges, hogy az $f_{11}(x)$ és $f_{22}(x)$ függvények egyike azonosan zérus, szerepeik szimmetrikussága miatt elegendő, ha például csak az $f_{22}(x)\equiv 0$ esetre gondolunk. Így az

$$f_{11}(x)=e^{\lambda x},\ f_{12}(x)=f_{21}(x)=f_{22}(x)=0$$

megoldáshoz jutunk, amelyik (II)-ből ugyancsak $q=0$ helyettesítéssel és $p\to\infty$ határátmenettel származik. Végül $f_{11}(x)$ és $f_{22}(x)$ mindketten azonosan eltűnhetnek, ami a feladat triviális

$$f_{11}(x)=f_{12}(x)=f_{21}(x)=f_{22}(x)=0$$

megoldását szolgáltatja.

Könnyen belátható, hogy lényegében (I) az általános megoldás, belőle határátmenettel (II) és (III) levezethető. Ugyanis (I)-ből (II) áll elő, ha abban pozitív, illetőleg negatív x-ekre a $\lambda_2\to-\infty$ ill.

$\lambda_2 \to +\infty$ határátmenetet végezzük el. Viszont (III)-hoz jutunk, ha (I)-ben p, λ_1 és

$$\frac{\lambda_1-\lambda_2}{p-q}=\frac{1}{r}$$

változatlanul hagyása mellett a $q \to p$ határátmenetét hajtjuk végre.

A felsorolt megoldásokhoz szimmetriameggondolásokkal jutottunk. Érthető tehát, hogy a feladatnak egyes megoldásai nem szerepelnek közöttük. Az ilyen megoldások szimmetrikus megfelelői természetesen a felsoroltak között állanak.

Befejezésül a probléma geometriai jelentésére és a megoldások jellegzetes sajátságaira akarunk rámutatni. Az

$$u'=\frac{f_{11}(x)\,u+f_{12}(x)}{f_{21}(x)\,u+f_{22}(x)}$$

homográfiát (projektivitást) H^x-szel jelöljük. A feladat egyenletei azt fejezik ki, hogy a H^x homográfiák kommutatív csoportot alkotnak. Ugyanis a H^x és H^y homográfiák szorzatát alkotva kitűnik, hogy a feladat egyenleteinek fennállása mellett

$$H^xH^y=H^yH^x=H^{x+y}.$$

A feladat megoldásával az összes ily folytonos csoportot előállítottuk. A homográfiáknak p és q fixpontjai, mert, mint (4)-ből kitűnik, ennek a quadratikus egyenletnek gyökei:

$$f_{21}(x)\,u^2-\big(f_{11}(x)-f_{22}(x)\big)\,u-f_{12}(x)=0.$$

Bevezetjük a következő három mennyiséget: függvényrendszerünk determinánsát, karakterisztikus egyenletének diszkriminánsát, végül a H^x homográfia karakterisztikus kettősviszonyát:

$$\begin{aligned}\Delta(x)&=f_{11}(x)\,f_{22}(x)-f_{12}(x)\,f_{21}(x),\\ D(x)&=[f_{11}(x)-f_{22}(x)]^2+4f_{12}(x)\,f_{21}(x),\\ \Theta(x)&=(pquu')=\frac{f_{11}(x)+f_{22}(x)+\sqrt{D(x)}}{f_{11}(x)+f_{22}(x)-\sqrt{D(x)}}.\end{aligned}$$

Megoldásainknál ezek a mennyiségek a következőképpen alakulnak:

(I)-re nézve $\Delta(x)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$, $D(x)=(e^{\lambda_1 x}-e^{\lambda_2 x})^2$, $\Theta(x)=e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}$;
(II)-re nézve $\Delta(x)=0$, $D(x)=e^{2\lambda x}$, $\Theta(x)=0$ ill. ∞;
(III)-ra nézve $\Delta(x)=e^{2\lambda x}$, $D(x)=0$, $\Theta(x)=1$.

*(Kárteszi Ferenc és Zigány Ferenc)**

---

* A két szerző a feladatot külön-külön oldotta meg. Helyszűke miatt a két megoldást összevontuk. *Szerk.*

A 4. feladat második megoldása.

A keresett függvényekből $F=(f_{ik})$ matrixot alkotva a feladat az

$$F(x)\,F(y)=F(x+y) \tag{1}$$

függvényegyenlet folytonos valós megoldásainak keresését jelenti.

Az alábbiakban valós számok és másodrendű négyzetes matrixok szerepelnek. Az elemi osztók elméletéből közvetlenül adódik (s ellenőrizni is könnyű), hogy minden ilyen matrix felírható az

$$M_1=T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}T,\quad M_2=T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda & \rho\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}T,\quad M_3=T^{-1}\begin{pmatrix}\mu & \nu\\ -\nu & \mu\end{pmatrix}T \tag{2}$$

alakok valamelyikében. Ez akkor is fennáll, ha ρ helyett például 1-et írunk. Használjuk a szokott

$$e^M=1+M+\frac{M^2}{2!}+\cdots$$

értelmezést (1 itt az egységmatrixot jelenti). Megjegyezzük, hogy általában $e^Me^N\neq e^{M+N}$, viszont felcserélhető M és N-re fennáll az egyenlőség s így természetes n-re $(e^M)^n=e^{nM}$. A (2) alattiakra egyszerű számítás szerint:

$$\begin{aligned} e^{M_1}&=T^{-1}\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & 0\\ 0 & e^{\lambda_2}\end{pmatrix}T,\quad e^{M_2}=T^{-1}\begin{pmatrix}e^{\lambda} & \rho e^{\lambda}\\ 0 & e^{\lambda}\end{pmatrix}T,\\ e^{M_3}&=T^{-1}\begin{pmatrix}e^{\mu}\cos\nu & e^{\mu}\sin\nu\\ -e^{\mu}\sin\nu & e^{\mu}\cos\nu\end{pmatrix}T. \end{aligned} \tag{3}$$

Ebből kiolvasható, hogy $e^M=e^N$ fennállásából $M-N=kP$ következik, ahol k egész szám és

$$P=\begin{pmatrix}0 & 2\pi\\ -2\pi & 0\end{pmatrix}.$$

Minthogy a szorzatmatrix rangja egy tényező rangját sem haladhatja meg, (1) következtében $F(x)$ rangja r független x-től.

I. eset. $r=2$. Minthogy (1) szerint $F(x)=\left[F\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$, $F(x)$ felírható az

$$\begin{aligned} M_1^2&=T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}T,\quad M_2^2=T^{-1}\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\rho\lambda\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}T,\\ M_3^2&=T^{-1}\begin{pmatrix}\mu^2-\nu^2 & 2\mu\nu\\ -2\mu\nu & \mu^2-\nu^2\end{pmatrix}T \end{aligned} \tag{4}$$

alakok valamelyikében. (3)-al való összevetés, $r=2$ figyelembevételével, azt mutatja, hogy $F(x)$ írható $e^{A(x)}$ alakban. Mivel (1) szerint $F(0)$

önmagának négyzete, $r=2$ miatt $F(0)=1$ s így $A(0)=0$ lehetséges választás. Bár $F(x)$ nem határozza meg egyértelműen $A(x)$-et, $F(x)$ folytonossága miatt $A(x)$ folytonosnak választható. Legyen $A(x)$ folytonos és $A(0)=0$. Minden természetes n-re (1) következtében $[F(x)]^n = F(nx)$, tehát $nA(x) - A(nx) = kP$. Itt k függhetne x-től, azonban csak egész értékeket vehet fel s így a baloldal folytonossága miatt állandó, $x=0$ helyettesítés alapján pedig $k=0$. Tehát $A(x)$ és minden eleme eleget tesz az

$$nf(x) = f(nx) \tag{5}$$

függvényegyenletnek. Ennek egyetlen folytonos megoldása $f(x)=mx$. Ezért $A(x)$ elemei ilyen függvények s így $A(x)=Mx$, azaz $F(x)=e^{Mx}$ s ez kielégíti (1)-et. M-nek (2) szerinti beosztása ($\rho = 1$ választással) a következő megoldásokhoz vezet:

$$\left.\begin{aligned} &F_1(x) = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 x}\end{pmatrix} T, \quad F_2(x) = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ 0 & e^{\lambda x}\end{pmatrix} T, \\ &F_3(x) = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{\mu x}\cos\nu x & e^{\mu x}\sin\nu x \\ -e^{\mu x}\sin\nu x & e^{\mu x}\cos\nu x \end{pmatrix} T. \end{aligned}\right\} \tag{I}$$

II. eset: $r=1$. Ebben az esetben (4) tanúsága szerint $F(x)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda_1 \neq 0)$$

alakra transzformálható. Ha két felcserélhető matrix és szorzatuk is ilyen alakra transzformálható, akkor mindhármat ugyanazokkal a matrixokkal lehet erre az alakra transzformálni. Mivel pedig (1) sze rint $F(x)$ és $F(y)$ felcserélhető, $F(x)$ állandó T használatával

$$T^{-1}\begin{pmatrix} e^{f(x)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T$$

alakban írható. $F(x)$ folytonossága miatt $f(x)$ folytonos és (1) miatt eleget tesz (5)-nek, tehát

$$F(x) = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T \tag{II}$$

s ez kielégíti (1)-et.

III. eset: $r=0$. Ez az eset a triviális

$$F(x) = 0 \tag{III}$$

megoldást szolgáltatja.

Összefoglalva és nem-szinguláris $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alkalmazásával (erre tehát $ad - bc \neq 0$) részletesen kiírva a megoldások a következők:

$$\left.\begin{aligned} f_{11} &= \frac{ade^{\lambda_1 x} - bce^{\lambda_2 x}}{ad-bc} & f_{12} &= \frac{bd}{ad-bc}\left(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}\right) \\ f_{21} &= \frac{ac}{ad-bc}\left(e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}\right) & f_{22} &= \frac{ade^{\lambda_2 x} - bce^{\lambda_1 x}}{ad-bc} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_1)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{11} &= \left(1 + \frac{cd}{ad-bc}x\right)e^{\lambda x} & f_{12} &= \frac{d^2}{ad-bc}e^{\lambda x} \\ f_{21} &= -\frac{c^2}{ad-bc}e^{\lambda x} & f_{22} &= \left(1 - \frac{cd}{ad-bc}x\right)e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_2)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{11} &= e^{\mu x}\left(\cos \nu x + \frac{ab+cd}{ad-bc}\sin \nu x\right) & f_{12} &= \frac{b^2+d^2}{ad+bc}e^{\mu x}\sin \nu x \\ f_{21} &= -\frac{a^2+c^2}{ad-bc}e^{\mu x}\sin \nu x & f_{22} &= e^{\mu x}\left(\cos \nu x - \frac{ab+cd}{ad-bc}\sin \nu x\right) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I}_3)$$

$$\left.\begin{aligned} f_{11} &= \frac{ad}{ad-bc}e^{\lambda x} & f_{12} &= \frac{bd}{ad-bc}e^{\lambda x} \\ f_{21} &= -\frac{ac}{ad-be}e^{\lambda x} & f_{22} &= -\frac{bc}{ad-bc}e^{\lambda x} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{II})$$

$$f_{11} = f_{12} = f_{21} = f_{22} = 0. \quad (\mathrm{III})$$

A megoldásainkban szereplő a, b, c, d paraméterek — a homogeneitás megszüntetése mellett — minden esetben pótolhatók két paraméterrel. E pótlás azonban vagy bonyolultabb formulákat eredményez, vagy szinguláris megoldásokat teremt.

Ha $F(x)$ megoldás, akkor nyilván megoldás $F(cx)$, $e^x F(x)$ és állandó T-vel képzett $T^{-1}F(x)\,T$ is. Ezekkel a lépésekkel a fent adott megoldások mindegyike visszavezethető a következő ötre:

$$\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megemlítjük, hogy tárgyalásmódunk csekély változtatással az n-edrendű négyzetes matrixokra vonatkoztatott (1) egyenlet megoldásait is szolgáltatja. A teljes megoldást minden esetben

$$e^{Ax} - B$$

adja, ahol A és B az

$$AB = BA = 0, \; B^2 = B$$

egyenleteket kielégítő állandó, n-edrendű matrixok. Lényegében már e^{Ax} is az összes megoldásokat adja, mert a $B \neq 0$ esetek ennek elfajulásaiként is felfoghatók (miként (II) és (III) is elfajuló alakjai (I)-nek). *(Hajós György)*

A 4. feladat megoldását még beküldötték: vitéz Szép Jenő és Gáspár Rezső (közösen), továbbá Surányi János.

*

5. Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az

$$x^n - \binom{A}{1} x^{n-1} + \binom{A}{2} x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \binom{A}{n} = 0$$

egyenlet gyökei, hol A tetszőleges szám. Bebizonyítandó, hogy

$$x_1^\nu + x_2^\nu + \cdots + x_n^\nu = A. \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

(Turán Pál)

Az 5. feladat második megoldása.*

A tétel $A = 0, 1, \ldots, n$ esetében nyilvánvaló, mert akkor az egyenletet így is írhatjuk:

$$(x-1)^A x^{n-A} = 0.$$

Az általános esetben jelöljük a gyökök ν-edik hatványainak összegét $s_\nu = s_\nu(A)$-val, a gyökök elemi szimmetrikus formáit pedig c_k-val, hol k a fokszám. Ismeretes, hogy az s_ν-k a c_k-kkal a következőkép fejezhetők ki:

$$s_\nu = \sum a_{k_1, \ldots, k_m} c_{k_1} \cdots c_{k_m},$$

hol az a-k állandók és a jobboldal minden tagjára $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = \nu$. Itt $c_k = \binom{A}{k}$ az A-nak k-adfokú polinomja s így $s_\nu(A)$, tehát $s_\nu(A) - A$ is legfeljebb ν-edfokú polinom. Láttuk, hogy ez utóbbi $A = 0, 1, \ldots, n$ esetében, tehát $n+1$ különböző helyen eltűnik. Ha tehát $\nu \leq n$, akkor azonosan tűnik el, q. e. d.

(Sólyi Antal)

*

7. Bebizonyítandó, hogy az otrocentrikus tetraéder négy magasságán átmenő minden másodrendű kúpra derékszögű triéderek helyezhetők el.

(Klug Lipót)

A 7. feladat első megoldása.

A feladatban megnevezett kúpot a tetraéder egyik oldallapja egy kúpszeletben metszi. E kúpszelet átmegy ezen oldallap három csúcspontján és magasságpontján, s így egy ismert tétel szerint e kúpszelet egymásra merőleges aszimptotákkal bíró, ú. n. egyenoldalú hiperbola. Ha a kúp csúcsán át síkot fektetünk, mely a szóbanforgó oldallap

* Lásd az első megoldást a 208. oldalon.

síkjával párhuzamos, akkor az a kúpot az előbbi hiperbola aszimptotáival párhuzamos, tehát egymásra merőleges két alkotóban metszi. A tetraédernek az a magassága, mely merőleges a kiválasztott oldallapra, a kúpnak ama alkotója, mely az előbbi kettővel együtt ortogonális triédert alkot. Tetraéderünk négy oldallapjának megfelelően négy ily triéder található kúpunkon.

(Zigány Ferenc)

A 7. feladat második megoldása.

A szóbanforgó kúpon a tetraéder négy csúcsa és magasságpontja rajta fekszik. Clifford tétele[1] (első rész) szerint tehát e kúp egyenoldalú. Már pedig egyenoldalú kúpon ∞^1 derékszögű triéder fekszik.

(Kárteszi Ferenc)

A 7. feladatra még Sándor Gyula küldött be két megoldást, melyek a fenti megoldásokkal lényegileg megegyeznek.

*

8. Bebizonyítandó, hogy bármely két ortocentrikus tetraéder csúcspontjain és magasságpontjain át másodrendű felület fektethető.

(Egerváry Jenő)

A 8. feladat megoldása.

A két tetraéder nyolc csúcsán és az egyik tetraéder magasságpontján — mint általában kilenc ponton — áthalad egy másodrendű felület. Clifford tételének[1] első része szerint ez egyenoldalú másodrendű felület és így e tétel második része szerint a másik tetraéder magasságpontját is tartalmazza.

(Kárteszi Ferenc, Sándor Gyula, Zigány Ferenc)

[1] 1. Ha egy másodrendű felület átmegy egy ortocentrikus tetraéder csúcsain és magasságpontján, akkor a felület egyenoldalú. 2. Ha egy egyenoldalú másodrendű felület átmegy egy ortocentrikus tetraéder csúcsain akkor a tetraéder magasságpontját is tartalmazza. (Egyenoldalúnak nevezünk egy másodrendű felületet, ha aszimptotakúpja tartalmaz derékszögű triédert.) L. W. L. Clifford, Mathematical Papers, p. 609 (1864). L. továbbá Klug Lipót, Másodrendű felületbe írt tetraéderek közös magasságponttal, Math. és Természettud. Értesítő, **51** (1925).

IRODALOM.

Pekár Dezső: Báró Eötvös Lóránd (a torziós inga ötven éves jubiliumára.) A Kis Akadémia Könyvtára, 48. kötet, Budapest, 1941, 340 oldal.

Eötvös a mi nagy reprezentatív tudósunk, akire mindig büszkén hivatkozhatunk, amikor a magyar tudományosságról van szó. Gravitációs mérései ismeretesek az egész világon és egyedül állanak a maguk neméban.

Van ugyan már egy könyvünk róla, amelyet pályatársai és tanítványai írtak a fizikusok részére. Pekár új könyve tágabb olvasókör számára íródott. A Föld alakjával, felületi rétegének szerkezetével, a benne előforduló anyagokkal, azoknak helyével, mozgásával foglalkozó tudósok és gyakorlati emberek a kutatásnak egyik legfontosabb módszerét ismerhetik meg belőle. A kultúrfilozófusok figyelmét is lekötheti e könyv, mert könnyed stílusban, különleges szakismereteket nem követelő módon elmondja, hogy egy egyszerű fizikai eszközhöz fűződően, a régibb ismereteket összefoglaló elmélet segítségével hogyan keletkezik egy új, nagy elméleti és gyakorlati kihatású tudomány, amely évszázadokra új feladatokat tűz ki az elme számára. Az ifjúság is kedves olvasmányt nyer vele, amelyből láthatja, hogy az ideális célkiűtéssel induló kutatómunka miképpen emeli fel az embert pályatársai fölé, teszi nevét ismeretessé az egész világon és szerez új javakat az emberiség számára. Ebből a szempontból szívesen megbocsátjuk a szerzőnek, hogy néha szubjektív és hogy útirajzokat is ád.

De a fizikusok számára is hoz újat a könyv. Megtaláljuk benne az Eötvös-inga fejlődésének történetét: hogyan válik a már régebben is ismert torziós mérleg gravitációs multiplikátorrá és kompenzátorrá, majd görbületi variométerré, hogyan alakul át horizontális variométerré, amely a nehézségi erőnek a vízszintes irányban előálló igen csekély változásait is mérhetővé teszi, és hogyan válik belőle a ma már több száz példányban használt kettős Eötvös-inga.

A gravitációs méréseknek történetét is megkapjuk. Az 1891-ben a vasmegyei Sághegyen kezdődő mérésekből az azóta eltelt 50 év alatt hazánkban 12,500 négyzetkilométernyi területen 4700 állomáson, a külföldön pedig főleg bánya- és olajkutatások céljaira igen sok helyen voltak ilyen mérések és ma is növekedő számban folytatódnak. Maga Pekár munkatársaival Indiában és Franciaországban is nagy területeket hálózott be velük.

Izelítőt kapunk abból is, hogyan mennek végbe e mérések, hogyan lehet a terénhatás levonásával a topografikus hatást, ebből a normális érték levonásával a topografikus rendellenességet, vagyis a gravitációs zavart meghatározni, amelyet az állomás közelében lévő hegytömegek és a földalatti rendellenes tömegeloszlások hoznak létre, és hogyan lehet e gravitációs zavarból a kartografikus hatás levonásával a földalatti rendellenességet kiszámítani és az azt okozó tömegekre következtetni. A szakemberek hálásak lehetnek azon problémák felsorolásáért is, amelyekkel Eötvös sokat foglalkozott, de róluk semmit sem publikált. Vannak közöttük olyanok, amelyek azóta külföldi szakfolyóiratokban többször tárgyaltattak. Fontos volna tudni, hogy Eötvös milyen eredményekre jutott és milyen álláspontot foglalt el velük szemben.

A szerző említi, hogy Eötvös méréseinek eredményei tíz vaskos kötetet tennének ki, és hogy kiadásuk fontos feladat volna. Amikor szívesen elismerjük, hogy e tíz kötet jó szolgálatot tenne azon — bizonyára nem nagyszámú — kutatóknak, akik a felmért területek geofizikai viszonyaival foglalkozni fognak, engedje meg a szerző, hogy figyelmét egy másik, szintén nagyon fontos szükségletre felhívjuk, amely könnyen ki is elégíthető. Szükség volna a nehézségi erő méréséről szóló és a szakemberek számára készült tudományos kézi könyvre, amely Eötvös különböző helyeken megjelent értekezéseit összefoglalná, a mérési eljárásokat, valamint a számítási módokat részletesen és pedig bőséges példákkal kapcsolatban kifejtené és más tudósoknak e tárgyra vonatkozó publikációit is tekintetbe venné. Ilyen tartalmú könyvvel[1] Eötvös alkotása méltó betetőzést nyerne. Hogy első sorban Pekár volna erre hivatva, az nyilvánvaló. Közel egynegyed századon át volt Eötvösnek a munkatársa, az expedíciókat mindig ő szervezte és vezette, a mérések legnagyobb részét ő végezte vagy pedig az általa betanított munkatársai végezték, Eötvös halála után pedig az egész problémacsoportnak ő volt a mozgatója, a külföldről ide jött tudósoknak betanítója, Eötvös eszméinek hirdetője és az eszköznek egyik tökéletesítője. Méltán várjuk tehát e munkát első sorban ő tőle.

Mikola Sándor.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1942. évi XLVI. matematikai tanulóversenyről.

A versenyt 1942. okt. 17-én tartottuk meg. Budapesten 54 versenyző jelentkezett és beadatott 35 dolgozat. Kolozsvárott 10 versenyzőből 4-en, Szegeden 6 versenyzőből 5-en adtak be dolgozatot. A verseny tételei a következők voltak:

I. Bebizonyítandó, hogy bármely háromszögben legfeljebb egy olyan oldal van, mely kisebb a megfelelő magasságnál.

II. Legyenek a, b, c, d olyan egész számok, hogy az

$$ax + by = m, \qquad cx + dy = n$$

egyenletrendszernek m és n minden egészszámú értékénél van egész (x, y) megoldása. Bebizonyítandó, hogy akkor

$$ad - bc = \pm 1.$$

III. Az ABC szabályos háromszög BC, CA, AB oldalain az A_1, B_1, C_1 pontok úgy helyezkednek el, hogy $AC_1 = 2.C_1B$, $BA_1 = 2.A_1C$, $CB_1 = 2.B_1A$. Bebizonyítandó, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek által határolt háromszög területe az ABC háromszög területének egyhetede.

A kiküldött bírálóbizottság tagjai voltak: Fejér Lipót elnöklete alatt Egerváry Jenő, Faragó Andor, Kőnig Dénes, Szücs Adolf, Veress Pál és Hajós György előadó. (Kimentették magukat Kerékjártó Béla és Stachó Tibor.) E bizottság 1942. okt. 31-én tartott ülésén Hajós György előadó előterjesztése alapján a következő egyhangú javaslatban állapodott meg.

«A bizottság mindenekelőtt örömmel állapítja meg, hogy az idei verseny mind a dolgozatok átlagát, mint a dolgozatok legjavát tekintve, igen sikeresnek mondható. Az első b. Eötvös-jutalomra Császár Ákost hozzuk javaslatba, aki a ciszterci rend budapesti Szt. Imre gimnáziumában Losonczi Timót tanár tanítványa volt. Ő mind a három tételre igen ügyes és szabatos bizonyítást adott; tömör és világos fogalmazásával is szép matematikai képességeket árult el. A második b. Eötvös-jutalomra Pál Sándort javasoljuk, aki a budapesti I. ker. áll. Verbőczy István-gimnáziumban Hoffmann Ernő és Milinkovich Frigyes tanárok tanítványa volt. Dolgozata csupán tömörség tekintetében marad Császáré mögött. Mindkét dolgozat ellen csak az a kifogás tehető, hogy a II. feladatban $ad—bc$ eltűnésének a lehetőségét figyelmen kívül hagyták.

Igen szép dolgozatot adott be még FUCHS LÁSZLÓ; önmagában tekintve ő is jutalmat érdemelne; tekintve azonban a bizonyításaiban mutatkozó hosszadalmasságokat, dolgozatát Császáré és Pálé mögé kell helyeznünk és csak dícséretre hozhatjuk javaslatba. Dícséretet érdemelnek továbbá FARKAS IMRE, SZEMERE IMRE és GYŐRI ANDRÁS, akik lényegileg szintén mind a három feladatot megoldották.»

A bizottság e javaslatát a Választmány 1942. nov. 12-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen a napon tartott előadóülésen POGÁNY BÉLA elnök adta át a díjakat a verseny győzteseinek.

Császár Ákos jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Jelöljük a háromszög oldalait a, b, c-vel, a nekik megfelelő magasságokat m_a, m_b, m_c-vel, a velük szemben fekvő szögeket pedig α, β, γ-val. Tegyük fel, hogy a háromszögnek két oldala kisebb a nekik megfelelő magasságnál. Legyen pl. $a < m_a$ és $b < m_b$. Feltevésünk alapján $m_b = a \sin\gamma > b$, valamint $m_a = b \sin\gamma > a$. Innen egyrészt $\sin\gamma > \frac{b}{a}$, másrészt $\sin\gamma > \frac{a}{b}$. Az $\frac{a}{b}$ és $\frac{b}{a}$ számok közül azonban az egyik mindenesetre nagyobb az egységnél, vagy, $a = b$ esetén, mindkettő egyenlő vele. Ebből következnék: $\sin\gamma > 1$. Ez azonban lehetetlen, tehát a háromszögnek nem lehet két oldala, mely kisebb a megfelelő magasságnál.

II. tétel. Az egyenletrendszer megoldása:

$$x = \frac{md—bn}{ad—bc}, \quad y = \frac{an—mc}{ad—bc}.$$

Az $m=1$, $n=0$, illetve $m=0$, $n=1$ helyettesítés a következő két gyökrendszerre vezet:

$$x = \frac{d}{ad—bc}, \quad y = \frac{—c}{ad—bc} \quad \text{ill.} \quad x = \frac{—b}{ad—bc}, \quad y = \frac{a}{ad—bc}.$$

Jelöljük az a, b, c, d számok legnagyobb közös osztóját D-vel. A fentiekből világos, hogy D osztható $(ad—bc)$-vel. E szerint

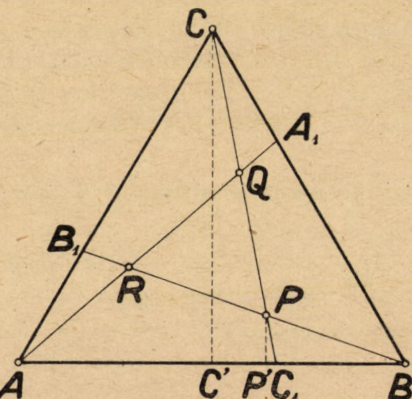
$$|ad—bc| \leq |D|. \tag{1}$$

Másrészt nyilvánvaló, hogy $ad—bc$ osztható D^2-tel, azaz

$$D^2 \leq |ad—bc|. \tag{1a}$$

Innen
$$D^2 \leqq |D|. \qquad (2)$$
Mivel $D=0$ értelmetlen lenne, (2)-nek csak két egészszámú megoldása marad: $D=\pm 1$. (1) és (1a) alapján $1 \leqq |ad-bc| \leqq 1$, azaz $ad-bc=\pm 1$.

III. tétel. Jelöljük a keletkező háromszög csúcsait P, Q, R-rel, a C és P pontból az AB-re bocsátott merőlegesek talppontjait pedig C'-vel és P'-vel. Mivel a PQR háromszög oldalai az ABC háromszög



megfelelő oldalaiból teljesen analóg szerkesztéssel keletkeztek, azért a PQR háromszög is szabályos. Ugyanezért $C_1BC\triangle \cong A_1CA\triangle \cong B_1AB\triangle$, valamint $C_1BP\triangle \cong A_1CQ\triangle \cong B_1AR\triangle$. Világos, hogy
$$PQR\triangle = ABC\triangle - C_1BC\triangle - A_1CA\triangle - B_1AB\triangle + C_1BP\triangle + A_1CQ\triangle +$$
$$+ B_1AR\triangle = ABC\triangle - 3C_1BC\triangle + 3C_1BP\triangle.$$
Mivel azonban $C_1B = \frac{1}{3}AB$, s a CC' magasság közös, azért $C_1BC\triangle = \frac{1}{3}ABC\triangle$. Innen
$$PQR\triangle = 3C_1BP\triangle. \qquad (1)$$
Minthogy $BPC_1\sphericalangle = RPQ\sphericalangle = 60^\circ = ABC\sphericalangle$, továbbá $PC_1B\sphericalangle = CC_1B\sphericalangle$, azért $PC_1B\triangle \sim BC_1C\triangle$. Ennek folytán
$$PC_1B\triangle : BC_1C\triangle = \overline{B_1C}^2 : \overline{C_1C}^2. \qquad (2)$$
A C_1BC háromszögben azonban a cosinus-tétel szerint $\overline{CC_1}^2 = \overline{C_1B}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{C_1B}\,.\,\overline{BC}\cos 60^\circ$. De a szerkesztés alapján $3C_1B = BC$, azaz $\overline{CC_1}^2 = \overline{C_1B}^2 + 9\overline{C_1B}^2 - 2.\overline{C_1B}.3.\overline{C_1B}.\frac{1}{2} = 7\overline{C_1B}^2$. E szerint $\overline{C_1B}^2 : \overline{C_1C}^2 =$

$=1:7$, vagy (2) alapján $PC_1B\triangle : BC_1C\triangle = 1:7$. (1)-ből azonban következik, hogy $PQR\triangle = 3PC_1B\triangle = \frac{3}{7} BC_1C\triangle$, s mivel $BC_1C\triangle = \frac{1}{3} ABC\triangle$, azért végül is $PQR\triangle = \frac{1}{7} ABC\triangle$. *Q. e. d.*

Pál Sándor jutalmazott dolgozata.

I. tétel. Tegyük fel, hogy az a-hoz tartozó magassság, $m_a > a$, és $m_b > b$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $m_a \geqq m_b$. Ekkor $m_a \geqq m_b > b$, azonban $m_a > b$ lehetetlen.

II. tétet. Az egyenletekből

$$x = \frac{dm-bn}{ad-bc} \quad \text{és} \quad y = \frac{an-cm}{ad-bc}.$$

Legyen $(b, d) = \delta$, $b = b'\delta$, $d = d'\delta$ (b' és d' relatív prímek). Ekkor

$$x = \frac{d'\delta m - b'\delta n}{ad'\delta - cb'\delta} = \frac{d'm-b'n}{ad'-b'c}.$$

A $d'm-b'n=1$ diophantosi egyenletnek van megoldása, mert d', b' és 1 páronként relatív prímek (m, n ismeretlenek). A megoldás által nyert m, n értékpárt téve az x-be, $x = \frac{1}{ad'-b'c}$. Minthogy x mindig véges egész szám, $ad'-b'c = \pm 1$. δ-val szorozva az egyenletet $ad-bc = \pm\delta$. Ugyanígy kaphatjuk y értékének vizsgálatából, hogy $ad-bc = \pm\varepsilon$, ahol $\varepsilon = (a, c)$. Tehát $\delta = \pm\varepsilon$ közös osztója a és b-nek. De a-nak b-vel nem lehet ± 1-től különböző közös osztója, mert különben $ax + by = m$ nem volna lehetséges m minden egész értékére, nevezetesen m nem vehetne fel $\delta = \pm\varepsilon$-nal nem osztható egész értékeket. Tehát $\delta = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$ és így $ad-bc = \pm 1$. *Q. e. d.*

III. tétel.[1] A következőkben a háromszögek területei helyett magukat a háromszögeket írjuk, tehát pl. $ABC\triangle = T$ az ABC területét jelöli. Ha $AB = a$, akkor $C_1B = \frac{a}{3}$, tehát $C_1BC\triangle = \frac{T}{3}$ (egyenlő magasságú háromszögek). Az $AB_1B\triangle \cong BC_1C\triangle$, mert két oldaluk és közbezárt szögük egyenlő. Tehát $B_1BA\sphericalangle = C_1CB\sphericalangle$. Továbbá $PC_1B\triangle \sim CC_1B\triangle$. mert két szögük egyenlő. Innen következik, hogy $PC_1 : BC_1 = BC_1 : CC_1$ és $\overline{PC_1} . \overline{CC_1} = \overline{BC_1}^2$. Vagy $PC_1 : CC_1 = \overline{BC_1}^2 : \overline{CC_1}^2$. De $BC_1 = \frac{a}{3}$, és $CC_1B\triangle$-ből a cosinus tétellel

$$\overline{CC_1}^2 = a^2 + \frac{a^2}{9} - 2a . \frac{a}{3} . \cos 60° = \frac{7a^2}{9}.$$

[1] Az idetartozó ábra megegyezik a megelőző dolgozat ábrájával.

Ezeket az értékeket helyettesítve $PC_1 : CC_1 = \frac{a^2}{9} : \frac{7a^2}{9} = 1:7$. De ha C vetülete AB-n C', P-é P', $C_1BC\triangle : C_1BP\triangle = CC' : PP' = CC_1 : PC_1$, tehát $C_1BC\triangle : C_1BP\triangle = 7:1$. Minthogy $C_1BC\triangle = \frac{T}{3}$, $\frac{T}{3} : C_1BP\triangle = 7:1$ és $C_1BP\triangle = \frac{T}{21}$. Azonban

$$CBP\triangle = CBC_1\triangle - C_1BP\triangle = \frac{T}{3} - \frac{T}{21} = \frac{2T}{7}.$$

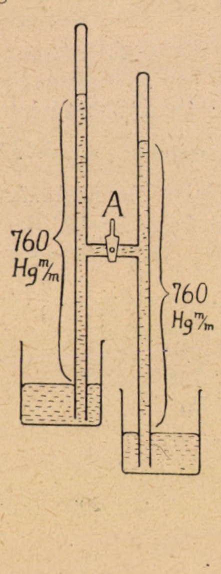
Ugyanígy $ARB\triangle = ACQ\triangle = \frac{2T}{7}$. De $CBP\triangle + ARB\triangle + ACQ\triangle + PQR\triangle = T$, amiből $PQR\triangle = \frac{T}{7}$. *Q. e. d.*

Jelentés az 1942. évi XXIV. Károly Irén fizikai tanulóversenyről.

A versenyt Társulatunk 1942. okt. 24-én tartotta Budapesten, Szegeden és Kolozsváron egyidejűleg. Budapesten 29 versenyző jelentkezett, Szegeden 3 és Kolozsváron 4. Budapesten 23 dolgozatot adtak be, Szegeden 3-at, Kolozsváron szintén 3-at. Tehát a 36 versenyző közül 29 adott be dolgozatot.

A verseny feladatai a következők voltak:

1. Az $m=10$ kg tömegű hengeres vasedény fenekének területe $q=100$ cm². Az edény tömegközéppontja a fenék fölött $h=20$ cm magasan van. Az edénybe fokozatosan higanyt töltünk (sűrűsége $d=13{\cdot}6$ gr/cm³). Hogyan változik a higany szintjének emelkedésével az edény és higany közös tömegközéppontjának helye? A higanyfelszín mely állása mellett lesz a közös tömegközéppont a legmélyebben?



2. Két Torricelli-cső berendezés áll egymás mellett a rajznak megfelelő helyzetben. Mi történik, ha a két csövet összekötő A csapot megnyitjuk?

3. Álló csigán átvetett kötél lelógó két szárán egy-egy majom kapaszkodik felfelé. A két majom súlya egyenlő, de az egyik majom erősebb a másiknál. Kérdés, hogy a csigát melyik majom érheti el hamarabb?

A dolgozatokat elbíráló bizottság, melynek elnöke Pogány Béla, tagjai Bay Zoltán, Hoffmann Ernő, Mikola Sándor, Ortvay Rudolf, Rybár István, Sarkadi Károly és Szabó Gábor, mint előadó voltak, 1942. nov. 7-én tartott ülésén a következőket állapította meg:

«Az 1. feladatot legtöbben szélsőérték-számítási feladat gyanánt fogták fel és ennek megfelelően hosszú számítással oldották meg. Csak két versenyző vette észre azt, hogy a közös tömegközéppont akkor van a legmélyebben, amikor éppen rajta van a higany felszínén. De ezt az észrevételüket a számításukban nem tudták értékesíteni. Egy versenyző, névszerint Kósa Péter, igen szellemesen: grafikusan oldotta meg a feladatot.

A 2. és 3. feladatot többféle elgondolás szerint oldották meg, de legtöbben, — különösen a 3. feladatnál — nem elég szabatosan indokolták meg az állításaikat.

Mind a három feladatot senki sem oldotta meg. Ezért a bizottság az első Károly Irén-díj kiadását nem is javasolja.

Két-két feladatot többen is megoldottak. Legjobb ezek közül a Szablya János dolgozata, azután a Kósa Péteré és végül a Huszár Istváné. A bizottság tisztelettel javasolja, hogy Szablya Jánosnak, aki a budapesti kat. egyetemi gimn.-ban végzett és Baintner Géza tanár tanítványa volt, Kósa Péternek, aki a budapesti I. ker. Verbőczy-gimn.-ban végzett és Hoffmann Ernő tanár tanítványa volt, végül Huszár Istvánnak, aki a csurgói ref. gimn.-ban végzett és Cser Andor tanár tanítványa volt, egy-egy második Károly Irén-díj adassék ki.»

A Választmány a bizottság e javaslatát 1942. nov. 12-én tartott ülésén egyhangúlag elfogadta. Az ugyanezen napon tartott előadó gyűlésen Pogány Béla, a Társulat elnöke kihirdette a verseny eredményét és a nyerteseknek a díjakat buzdító szavak kíséretében átadta.

KIMUTATÁS

az 1942. évi május 1-től 1942. évi szeptember 30-ig befolyt összegekről.

1. Tagdíj.

1927-re: Runtágné Perényi Gizella (6).
1928-ra: Radó Simon (6).
1929-re: Cholnoky Jenő (1), Radó Simon (2).
1930-ra: Cholnoky Jenő (4).
1937-re: Detre László (8).
1938-ra: Detre László (8).
1939-re: Detre László (8), Szűcs Adolf (8).
1940-re: Detre László (8), Fraknóy József (8), Lajta Ernő (8), Szűcs Adolf (8), Zigány Ferenc (5).
1941-re: Csada Imre (5), Detre László (8), Fraunhoffer Lajos (8), Hajós György (8), Radó Simon (8), Sebők Emánuel (6), Sós Ernő (8), Szabó Gusztáv (8), Szász Pál (8), Szűcs Adolf (8), Zigány Ferenc (8).
1942-re: Balyi Ferenc (6), Barnóthy Jenőné (8), Bertram Brunó (6), Borbély Samu (6), Csízhegyi Lajos (6), Darkó Béla (6), Detre László (8), Dér Zoltán (3), Dózsa Márton (8), Gausz József (6), Hajós György (8), Halász Ernő (8), Hárs János (8), Holenda Barnabás (6), Horvay Béla (8), Jáky József (8), Kárteszi Ferenc (8), Kilczer Gyula (8), Kovács István (8), Krausz József (8), László Zoltán (8), Márton Sámuel (6), Megyesi István (8), Nyáry Béla (6), Radó Simon (3), Rédei László (6), Sass Gábor (6), Sebők Emánuel (6), Sólyi Antal (6), Szalay Sándor (6), Szele Tibor (6), Szőke Béla (8), Vámos Sándor (6).
1943-ra: Bertram Brunó (6), Dózsa Márton (6).

2. Előfizetés.

1942-re: Bernardinum (8), Budapest Székesfőváros 19 példány (152), 1927—1928- és 1940—1942-re: Műegyetemi Kémiai-Fizikai Tanszék (40), 1933—1942-re: Műegyetemi II. Mat. Tanszék (80), 1942-re: Kegyesrendi gimn. Nagykároly (6), Polg. Tanárképző Főiskola Szeged (6), Rajz Miklós (6).

3. Segély.

M. T. Akadémia 1942. II. (500), Államsegély 1941-re (500).

Budapest, 1942. okt. 6.

Jelitai József,
pénztáros.

Felelős kiadó: Ortvay Rudolf.
3867 Franklin Társulat nyomdája. — vitéz Litvay Ödön.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA. – VITÉZ LITVAY Ö.